

# 有朋自遠方來——

## 專訪 Bardos 教授



訪 問：劉太平 (以下簡稱「劉」)

時 間：民國 91 年 8 月

地 點：中央研究院數學所

整 理：陳逸昆

Claude Bardos 教授，1940 年 4 月 4 日出生于巴黎，1960 年進 Eclole Normale Superieure，1964 年在阿爾及利亞大學 (University of Algiers) 當助教。1965~1969 年 J.-L. Lions 的博士學生，自 1970 年起任教巴黎第十三大學，1981 年升正教授。1981~1987 年在 Eclole Normale Superieure 當應用數學中心主任，目前任教巴黎第七大學。Bardos 教授為人寬和，容易和人溝通，他對法國應用數學有多方面的影響，他的博士生，如 Francois Golse 亦為一流數學家。

Bardos 教授有多項榮譽：Edmond Brun Prize of the French Academy of Sciences (1992)，Humboldt Prize (1993)，Marcel Dassault Grand Prize of the French Academy of Sciences (2004)。

劉：開始吧！通常我們先從你出生在怎樣的家庭，如何進入數學的領域談起。

**Bardos:** 我家族裡沒有科學家。父母在巴黎相識、1939 二次世界大戰前夕結婚。他們都是從匈牙利來的猶太人，但背景相當不同。

我母親在巴黎與家人同住，可說是來自上流社會。她父親是少數能在奧匈帝國做到上尉的猶太人。他自稱當禁衛軍時，曾與皇帝共餐。他也聲稱我們和 Von Karman 有關係。(由於我外祖父雖然是個好人，但他有點愛耍派頭，所以這些事的真實性我不能保證。)

然而奧匈帝國崩潰後，在經濟危機和反猶太的情況下，他們在法國過著艱苦的生活。(我媽告訴我，他們甚至曾忍飢挨餓過)。

另一方面，我父親從小就沒有家。1918 時他在匈牙利小村莊中的孤兒院裡。後來孤兒院破產不得不關閉，而流落街頭...。1939 年起我父親在巴黎受雇於郵票批發商。他在生意

上很成功，其實就是他的老闆安排他和我母親的婚事，因為他覺得這積極有活力的年輕人可以撐起我母親的家庭。長話短說，結果就真是如此。

不久，我父親成爲獨立的郵票批發商，而且青出於藍遠較他之前的老闆成功（大約在1987他晚年退休時是巴黎郵票批發的第一把交椅）。大戰期間，他努力保護妻子和岳父母（當然還有1940出生的我）而且參與法國反抗運動。

關於成爲數學家... 就和大部分的同事一樣，對於爲什麼你會成爲數學家這問題，我沒辦法給個確切的答案，或許談談這是怎麼發生的比較容易。

1951到1957讀中學時，我和父母同住，那時我外祖父正幫助一位在戰爭中失去家庭，並參加法國反抗運動在 Vercor 一役的匈牙利年輕人。戰末這位年輕人取了一個法國名字 Jean Bernay，他很快地成爲設計新一代戰機如“*Ouragan*”，“*Mystères*”和“*Mirages*”的 Marcel Dassault 企業的工程師。Jean Bernay 受過微積分的基本訓練。每週我和外祖父母一同進晚餐一次，他們邀 Bernay 共餐。餐後這老兄向我解釋導數、積分和微分方程。我真的樂在其中，這也許是我如何成爲一個數學家的一個緣起。我對歷史以外的人文學科不感興趣，但被各式各樣的科技所吸引。那是個科學很受歡迎的年代，正當第一個太空火箭（Gagarin）環繞地球，核能發電剛起步的時代。（當時沒人想到環境和廢料的問題）。

要更深入談到法國數學，就必須簡介一下法國的教育系統。法國科學教育的特徵是兩套系統並行，Universities 和 Grades Ecoles。Grades Ecoles 和英式學院如劍橋和牛津相似。

然而，更精確地說 99.5% 的 Universities 由國家在非常集權的系統下經營。有些 Grandes Ecoles，（最有名的 Ecole Polytechnique，各地的 Ecoles Normales, Ecole Centrale 等等）直接由國家出資，有些由地方團體，有些部分由國家，部分由私人出資... 等等。教師在他工作生涯中兩者皆待過是常有的事，一些有名望的實驗室（如 Laboratoire de Meteorologie Dynamique, Laboratoire de Physiques des Solides）是由一些 Ecole 和 University 共同出資。對研究者和教授來說兩者沒什麼差別。另一方面就學生而言，特別是第一年，差別可大了。Universities 對入學毫無篩選，每個有 baccalauréat 或同等外國學位（相當於高中畢業）的人都有權入學，學費非常低（可說是象徵性的）。可是學生一般來說受到很糟的照顧，他們在超大班上課，沒有個人輔導，沒有好的電腦設備...。

Grandes Ecoles 就很不同，非常難的入學考試，大家競爭有限的名額。爲了準備考試，學生通常在中學畢業後，花兩三年的時間在一些特殊的課程上。這些“預備課”（preparatoires），俗稱“taupe”，附設於中學。taupe 法語的意思是鼯鼠，當你待在這種課程中時，你理當

分分秒秒努力，不理會外頭的世界，如鼯鼠般全心挖洞不見天日。Taupe 的學生要是入學 Grandes Ecoles 簡直是上了天堂。有時候他也可以在 University 聽課，但有特別的家教、特別的圖書館和好的電腦設備等等。某些 Grades Ecoles 學生要付費，但由於他們被視為菁英，貸款很容易。尤有甚者，由教育部、國防部掌管的 Ecoles Normales, Ecole Polytechnique 的學生一入學，就具有相當於公務員或軍隊指揮官的身份，有可觀的薪水和好的住宿條件。

這樣系統有明顯的後果。首先，由於 preparatoires 的訓練和考試大多基於數學（多至 60% 的分數）。所有法國資賦優異的小孩，不管志在化學、建築、管理 . . . , 都花兩三年浸淫在數學訓練之中。再說 taupe 的老師相當拼命而且全心想讓學生通過考試。

我想這系統是造成法國數學學派多年來成功的主要原因。

其次，不同於 Universities, Grandes Ecoles 有真的“alumni”（校友），比如一位入學 Ecole Polytechnique 的學生氣力已經用盡了，他可以不想再用功，就此好好放鬆。他多半不會有個有趣的研究生涯，但這個系統會照顧他，讓他有工作以度餘生。有些有天份的人在入學後會因之流失。當然，要有個好的研究生涯，即便是在私人公司裡，入學後也必須非常努力才行。由於我中學讀得不錯（不是極好），我進入一所不在名校之列的 preparatoire, 但幸運地進入 Ecole Normale。我想我是倒數 43 位入學的。

進了 Ecole Normale 之後，我可以選擇不同的領域做任何事。然而最吸引我的不是數學本身而是法國數學界的氣氛，其中最特別的是 Laurent Schwartz 迷人的性格。事實上，我最喜愛的是：數學是一種和一群知名，能分享的人們一起做的活動。

劉：每次我到巴黎都發現數學家之間的互動很多。

**Bardos:** 我對這有更細微的觀察。在巴黎，我常見到極多的傑出數學家。但另一方面我不曾見到像 Stanford 或 Courant Institute 宜人的辦公室或實驗室。很多人在自家裡做事，而不常去辦公室（包括我）。這是法國的傳統，特別是在巴黎。在那並沒有很多的辦公室，即使是正教授也要共用一間。沒有特別的事不會去辦公室，而長期以來辦公室是空的。

劉：但因為有如此扎實的訓練，溝通對他們而言相當容易。

**Bardos:** 沒錯！溝通是在有相同訓練和語言的人之間產生。

劉：你個人的數學生涯（抱歉）已歷經了數十載，見過很多的好數學家，例如 Laurent, Schwartz 和 Leray 等。然而全世界都在變，在巴黎也該如此？像是人們溝通的方式、所做的數學，你必會感到在不停地改變，或是你不太想這些事。

**Bardos:** 你問的這麼多關於法國的問題，我就從寫論文時已發生的變遷談起。在 60 年代，數學潮流是朝向抽象化發展，而純數和應數的觀念確實是明確的劃分。或許大家應注意到在法國，一直到 30 年代，純數和應數沒有真正的區隔。有些顯著的例子很多人都會引用：

在第一次世界大戰期間 Marie Curie (居禮夫人) 首先將 X光用在戰場處理傷口。1934年, Ecole Normale 物理實驗室的成員 Yves Rocard 和 Maurice Poute 發明第一具雷達, 並使用於奧力岡和諾曼地這兩條船。Henri Poincaré 和 Hadamard 主要是在數學、力學和物理的領域工作。

我覺得純數和應數的區隔大約是 1935年出現的, 在英國是因 Hardy 的影響, 在法國則因 Bourbaki group 的成立。Bourbaki group 的歷史現在已有完備的記錄, 比如大家可以去看 André Weil 的自傳。我在他過世前數年於 Princeton 見過他, 同時也讀了他的書。讓我驚訝的是 André Weil 對與他合作者和年青一輩的影響, 不但可以從他們所做的數學看出來, 甚至還表現在他們由 André Weil 處學來的笑話、言辭和風格上。在60年代, 藉由著述的發表 Bourbaki group 在巴黎的影響力達到巔峰, 內容大多是代數和數論。我提過的 Laurent Schwartz 是這團體的奇異點。Leray 則因科學的, 或許也有個人的理由不是這團體的成員。就某方面而言, 他被孤立在 Collège de France (法蘭西學院, 另一個典型的法國機構) 而學生不容易見到他。又, 大家極尊崇他, 舉例而言, 在同一個 Grande Ecole 出來的人之間, 有互稱“tu”(你) 而不用“vous”(您) 的傳統。Leray 是唯一大家都尊稱“vous”的。除此之外, 他做很難的題目, 和 Laurent Schwartz 不同的是: Leray 很難理解。

打從一開始我就被分析給吸引, 當大學部學生時, 我上 Laurent Schwartz 所開的 Méthodes Mathématiques de la Physique, 真棒! 然而下一年我開始我的研究所前的學習時, 在巴黎所能找到最“具體”的課是由 Gustave Choquet 開的關於拓撲和勢能論的課。其實, 當時物理的風潮也傾向抽象。舉例而言 preparatoires 中最好的學生入學 Grande Ecole 後會進入抽象數學, 或非常理論的物理。

在60、70年代之間, 數學開始有走向更具體並兼顧應用的趨勢, 而這風潮並非法國獨有。調和分析從很形式化的觀點回到傅立葉分析和小波是個很好的例子。Stein 的 Singular Integral 一書, 和 Yves Meyer 以及他的學派在後來的貢獻是轉捩點。

在巴黎最有影響的事件是 Jacques Louis Lions 的到來。Lions 不是 Bourbaki group 的成員 (也許是個人品味的關係)。他是 Laurent Schwartz 的學生, 於 1962 年成為 University of Paris 的教授, 於 1966 成為 Ecole Polytechnique 的教授。他在 1966~1969 是我的指導教授。現在他的生涯和成就有很完善的文獻, 例如 Roger Temam 寫的傳記。我只想點出下列幾項:

1. 早在 1962 年以前, Lions 還在 Nancy 時已經開始和 CEA(法國原子能委員會) 合作以電腦做偏微分方程的數值分析。
2. 他對指導畢業論文的方法和其他教授非常不同。當時指導論文是非常形式化的。通常指導教授會給學生一個問題, 然後就等著學生解決問題再回來, 這可能花掉兩三年的

時間。不同的是：Lions 組織了一個實質的討論群。在那裡年輕的可受到較長的學生或畢業生的幫助。就我的例子，當我起步時確受到 Goulaouic 的幫助。Lions 他本身很迷人，花很多時間在學生身上，討論文章時反應極為快速，而且總是有很正面的建議，這一直吸引著很多學生，尤其是 Ecole Polytechnique 的學生。

3. 我說過，當時的物理（儘管有輝煌的過去）甚至比數學更抽象，Lions 能讓應用數學家 and 業界工程師直接接觸，不必透過物理學家。
4. 他自己創辦（或協助創辦）好幾個能作為大學和業界橋樑的機構，或許 INRIA 是最為人知的，但他也對 SEMA 的創辦有貢獻（和 Lattés 一起）。
5. 他經由 Von Neumann 以及他同輩的科學家如 Peter Lax 和 Louis Nirenberg 等人深深地體會到 Courant Institute 的經驗。結果是，在法國一個應用數學的大學派重新誕生。

劉：依我認識你這麼多年的印象，雖然你顯然屬於法國學派，但你做數學的方式、你的興趣和你的展望，並不能歸類於一般的法國數學家。這樣說公平嗎？

**Bardos:** 就我看來比起其他任何地方，法國人一向較喜愛在學校或大廳裡聚在一塊，這現象不只存在數學界（法國精神分析界更加明顯）。由於個人品味和信念，我有要更獨立的野心，而從科學的觀點，我的“榜樣”比較像是 MacKean 那樣，而不是法國的學術領袖。

劉：我記得你、Nishida 和 Ukai 幾乎同時介入動力方程（kinetic equations）這主題，其歷史背景如何？

**Bardos:** 這是個好問題，也是我前面所講的事情的好例子。我想我是法國第一批對動力方程有興趣的數學家。在法國有一些來自物理也有來自工程（Cabannes Guiraud Darrozes）的貢獻，但不論是理論或應用都沒有數學上的研究。同時由於大學派的存在這主題得到了很大的動量，這意味著研究人員能做些更細緻的分析，是我以前可能沒辦法做的，如所周知，這主題是由 Maxwell 和 Boltzmann 開始，在 Cercignani 寫的關於歷史的傑作“Boltzmann, the man who trusted the atoms”中有很好的描述。當時迫切的是由數學上的考量確認關於原子分子的假設。在我們的時代，觀點完全改變。完全了解了基礎物理之後，人們想去計算解（當然大多時候用計算機）。簡而言之每當考慮夠稀薄以致必須考慮個別粒子的速度的介質時，就需要動力方程。當介質變得夠濃，而達到所謂熱平衡的平均過程時就不需要了。現在，動力方程出現在很多應用領域。最明顯的是太空梭返回大氣層的研究，那是從稀薄的空氣很快速進入濃稠的空氣，而正如大家所知的，這是返航中最關鍵的時刻。一個叫中子傳播方程（Neutron Transport equation）的動力方程，被用來研究鈾的臨界值（可為民間和軍事之用），在這點上人們喜歡用方便的近似（叫 diffuse approximation）和方便的邊界條件。動力方程也被用於半導體設計，因為

元件（晶片等）太小以致於電流無法在過程中達到熱平衡。它們也出現在壓縮碟的讀頭設計上，因為讀頭和碟之間的距離太小以致每個空氣分子的速度都要考慮。最後，它們也可以用來做細胞生物學的數學描述。

有一點看來很重要必須記住的，涉及空氣分子的波茲曼方程 (Boltzmann equation) 就數學的觀點是最複雜的，因為所有的效應都在與分子交互作用，是非常非線性的一項。其他方程含有不同精微的物理現象，其主要現象常常是線性而較容易掌握。假使 Boltzmann 那時有核分裂的理論和實驗在手邊，他的科學生涯或許會輕鬆些。

正如同你所說的，Nishida、Ukai 和我同時開始做這主題，所以重燃這方面的興趣，的確和當時新的應用的出現有關。

和傳播方程 (Transport Equation) 第一次接觸是我做畢業論文的時候。聽從 Lions 的建議，我研讀了 Friedrichs, Lax, Phillips 的一系列文章，然後 Lions 不斷地問很簡單的方程但邊界上有奇異點會怎樣（這多多少少是中子傳播方程的邊界值問題的特性），所以我解決這問題。

第二次接觸是很久以後，在 Robert Dautray 的影響之下。

Robert Dautray 在數學界並不很有名。儘管原子能委員會做了好幾年的頭頭，他經常很害羞、很疏離，然而儘管是主管職，他一直對數學和物理的研究有興趣。他是 J. L Lions 最早的合作夥伴，他興起和 Lions 一起寫一本法國更新版的 Courant-Hilbert 的主意。由於 Bourbaki 和 Courant-Hilbert 的經驗的激發，Dautray 和 Lions 決定要把他們過去的學生和平常的合作者拉來一起努力。他們要我加入團隊來寫專論中子傳播方程和擴散近似一類問題的一冊。

最後的結果是2500頁分為三巨冊的大書，以法文由 Masson 出版叫“Analyse Mathématique pour les Sciences et les Technique”。然後 Dautray 有意把書分成八冊平裝本，讓每本比較便宜，賣得好些。最終被翻譯成英文 (Springer 出版) 德文、俄文和其他語言。我不知道這書對讀者是否非常有用，這書有著傾向於成為百科全書並將符號統一的野心，在某些程度上又有些背離直觀，使它相當難以親近。另一方面我深信這番努力對所有曾貢獻心力的人，甚至整個法國應用數學界都有很大的好處。

有一段時間 Dautray 每週邀請所有的參與者到他家討論計畫的狀況，讀已經寫好的部分，以及決定下一章要寫什麼，由誰來負責寫。他吸引了來自不同組織、學校、CEA(原子能委員會) 實驗室... 等等的科學家一起支持他的計畫。這確實改善了不同層面的應用科學的互動。

Dautray 把我介紹給好幾位了不起的科學家，例如 Balian。他是非常出名且受重視的物理學家，他聲稱自己不是數學家，然而我發現如 Hörmander 和其他人所提出的現代

微局部分析 (modern microlocal analysis), 其動機有極大部分來自 Balian 和 Bloch 在 *Annals of Physics* 於 1974 發表的一系列文章中。

當時當兵是每個法國人的義務, 但科學家有機會在軍事研究實驗室, 特別是 CEA 作研究。以這種方式 Julia, Golse 和 Perthame 在 Dautray 的實驗室服兵役並加入計畫。如我說的就是在這情況下我開始研究 (大多和 Remy Sentis 一起) 對中子傳播方程的擴散近似。在這架構下的邊界條件的議題隱喻著外差長度的觀念, 引導我們發現一個有效的方法, 以此計算用來改善 Navier-Stokes Equation 在太空船返航面的真實度的滑動邊界條件 (slip boundary condition)。

事實上在我們和 Sentis 的一篇關於用擴散近似來計算臨界大小的論文裡, 我們忘了證緊緻性論證, 那對證明的真實性是必要的。然後 Dautray 和 Cessenat (Dautry 在 CEA 的合作者) 要求 Golse 和 Perthame 來填補這鴻溝。結果成為法國在速度平均 (velocity averaging) 上第一篇文章, 由 Golse, Perthame 和 Sentis 所作。不久 Pierre Louis Lions 和這些作者改進這定理, 他們完成了後來被 Di Perna 和 Lions 所用來處理 Boltzmann 方程的速度平均引理。

劉：法國人一直對銳利的分析工具很在行, 例如所有的緊緻性的東西。而你怎麼認為? 那十分成功, 你知道的, 某方面來說那定義了法國分析的重要的一部分, 是吧! 每次看到都有點感到吃不消, 因為對我來講那是重機械。你意下如何? 但我的意思是, 我看到很多不等式之類的, 或許對了解的人並不那麼沉重。

**Bardos:** 我想事情是這樣的, 在法國我們對處理不等式有好的傳統。我們在泛函分析和平均定理上也有好的傳統, 剛剛討論的就是個好例子。

然而, 我認為不等式不是憑空而來。如果它們不只用於證明而且對現象的了解有貢獻, 它們會成為“永恆”的。我甚至可以這樣說, 一個對了解沒有貢獻的方程 (等式或不等式), 鮮少有機會有用。我確信在 Euler 或 Navier-Stokes 的問題缺少的是這方向的了解, 需要引進新的想法, 而非天才般地使用泛函或先驗估計。對這些問題, 我想能被這些方法解決的, 早已攤在好幾代的數學家之前, 當然包括 Leray, Caffarelli 和 Fefferman。我重申, 需要的是新觀念。

劉：不知道是否其他世代的人也曾說過, 全新的觀念是必要的。

**Bardos:** 不知道是否上個世代的人也有這樣的感覺。順著我們的談話, 在我心中一個更大的議題是, 未來如何? 我們要做什麼?

和語言比較 (這當然不是全部, 只是人類活動之一), 我作下列的註腳:

1. 數學、電腦與其他科技更廣泛地被用在全世界各角落。
2. 英文正成為全球化的語言, 全世界所有的人在科學上、商業上和聯繫上都用它。

另一方面真正地把英文當語言（文法等等）學的人其數目與使用這語言的人相較是無窮小。我不知道，數學是否會變成那樣。

絕對的嚴格對建構體系是必須的，可是一但建構完成，這樣的嚴格就變得沒那麼重要。傅立葉變換和分布理論是個好例子。這些工具確實被廣泛地使用，特別是由於快速傅立葉變換和小波的引入。然而對很多使用的人而言，對理論全盤的熟知並不必要。

劉：以現在這種形式做的研究是近幾十年開始的。

**Bardos:** 在上世紀初開始，並在60年代極為成功，產生了許多包括非數學家在內的許多人都使用的工具。然而可能會發生的最糟（對我們）情況是，數學的使用急速增加，而同時基本研究的需求卻下降。正如使用英文的例子一樣，不論如何我們必須為這樣的演變作準備。當然不意味著人們不需要受數學訓練。

劉：回到說英文的例子，我觀察到每個人真的必須學不少基本語言，沒錯吧！

**Bardos:** 當然！這可以部分地拯救數學研究，經驗告訴我們某種程度的研究活動，對於數學家成為好的老師幾乎是必要的。

劉：是的！然而這和數學研究上的基本改變不相矛盾。你已經觀察到這改變了嗎？

**Bardos:** 絕對是有的！比如先前談到，對應用數學的重視已經出現了。然而比起其他科學什麼是好的數學是個更主觀的觀念，而什麼是好的應用數學更是困難的議題。

劉：現在，我們能回到你個人的研究嗎？就你本身研究的切身經驗，舉例來說什麼是最讓你樂在其中的？

**Bardos:** 如前所說，我真的喜歡做應用數學，我對於能投入引用數學分析於物理上或工程上，來了解或計算問題的興趣，遠勝於創造新的數學結構。我已經談過了動力方程，而我試著給另一個例子。

劉：太好了，給個例子吧！

**Bardos:** 我可以描述我在控制理論（Control theory）上的工作。再一次地，Jacques Louis Lions 介紹我這個主題。當時我想大概是 1979，J. L. Lions 正在系統化地研究推廣常微分方程上的控制理論的古典觀念到偏微分方程上。而他有這樣的直覺，就是線性波方程對此是最好的架構，這是由於 Cauchy-Kowalewsky 定理夠接近古典的 Cauchy-Lipschitz 定理。在一個 SMAI(法國數學會)的聚會，他問我和 Jeff Rauch 一個關於可以穩定波動方程的解集合的幾何的問題。直接根據“bon sens”（直觀）我們回答這樣的集合可以相關的古典 Hamiltonian Flow 來刻劃。Lions說，好！證明它。結果花了十年才找出證明。

當我做到自認為在應用數學上最好的貢獻之時，事情動了起來。那和當時剛與 Boutet de Monvel 完成一篇關於繞射理論論文的 Gilles Lebeau 的計畫有關。Gilles 帶進來



了微局部分析上更精細的工具，特別是如 Melrose 和 Taylor 做的能量的微局部傳播，和以 Fourier-Bros-Igolnitzer 變換下的解析波前來詮釋繞射。如此 Lions 提出的問題和幾個推廣徹底被解決。

並不清楚 Lions 原來提出的問題算不算應用數學。那問題是與衛星的大型太陽鏡的震動有關的非常抽象的版本，而且可能太抽象以致對設備的設計沒有用。然而我們的計畫有幾項貢獻。根據海森堡原理，無法同時鎖定波的位置和前進方向（平面波除外）。但這在某種高頻的趨近行為下是可以的。首先，或許也是最重要的結果是對這議題的了解。當然這問題已經引起包括 Hadamard 和 Hörmander 在內的至少兩代的數學家的注意，但那時不那麼和應用有關。嚴格說來，我們沒有任何新的數學觀念的貢獻，但同時得到數值模擬的改進和對 Carleman 預估在唯一性定理 (Holmgren 型) 上角色的了解。最後，近幾年我遇到在 LOA (“Laboratoire Ondes et Acoustiques” de l’Ecole de Physique de Paris) 工作的 Mathias Fink，他依據他所謂的“時間回溯法”設計了一些設備，而了解他的方法結果發現和我們 (我, Gilles, Lebean, Jeff Rauch) 的研究遠較 Lions 引述的原始的衛星鏡的問題接近。

劉：某方面而言，你把所有的這些人聚在一起，是吧！

**Bardos:** 對！是的！將人們和想法聚在一塊，正如試著用數學來解釋現象是我真的喜歡做的事。然而，這讓我回到之前的議題，我們會有足夠聰明的想法把數學應用到實際的問題上？亦或是在不久的將來我們會用盡數學一切的可能性？

劉：但... 我懷疑早在五十或一百年前，數學家就一直在問這問題，而只有憑著真誠和正直我們才能向前。

**Bardos:** 是的！這與數學的快速擴張和數學會繼續不相矛盾。然而研究的風格可能會改變，而且同時數學家的型態和地位亦然。

劉：講得真好，謝謝！