

電腦解決數學問題的瓶頸

石厚高

我於民國 89 年八月一日退休，以往大部分時間都要花在學生身上，現在時間都是自己的了，想甚麼時候睡就甚麼時候睡，想看甚麼書就看甚麼書，應該是很愜意的。唯一的遺憾是再也沒有人聽我說話了，所以沒有退休的老師要珍惜眼下時光，在台上口沫橫飛興高彩烈又意氣昂揚，是多麼的快樂，不管學生願不願意聽都是非聽不可。

我執教初、高中共 38 年，有時課本講的不夠，或習題不周延，總要另加補充。初中我教了三年，高中 35 年都是高三。數學和其它科不同，因為它是學子夢魘，又容易忘，所以要複習。學生最怕三角，因為公式太多不會證明，當然就記不住了，所以我就花上二週時間把三角公式幾乎都證明一遍，也作些課本上沒有的題目，沒想到很受歡迎。大家也許會問，二週時間能把三角公式全部講一遍嗎？又作補充題？答案是肯定的，只要上課少講廢話就作得到。

退休之後，檢視大堆這種“垃圾”，雖然丟了一些總是有些“不捨”，而且總是覺得也許還會“東山再起”或“復出”。一疊疊的查一疊疊的丟，感覺有些“自廢武功”的味道。為甚麼是垃圾？因為只有自己用，它不能成書也不能送人，沒有人要這些東西。拿起一疊“反三角函數”時發現我給大家的一個習題。複習這一節時，常有學生問 $\sin^{-1} \sin 2$ 或 $\cos^{-1} \cos 3$ 如何作，一遍遍的講很煩人，所以就大家把

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ 時}$$

$$\sin^{-1} \sin(x), \cos^{-1} \cos(x), \tan^{-1} \tan(x), \cot^{-1} \cot(x), \sec^{-1} \sec(x), \csc^{-1} \csc(x)$$

作一作，也就是下面的 48 題

1. $\sin^{-1} \sin 1$ 2. $\cos^{-1} \cos 1$ 3. $\tan^{-1} \tan 1$ 4. $\cot^{-1} \cot 1$ 5. $\sec^{-1} \sec 1$ 6. $\csc^{-1} \csc 1$
7. $\sin^{-1} \sin 2$ 8. $\cos^{-1} \cos 2$ 9. $\tan^{-1} \tan 2$ 10. $\cot^{-1} \cot 2$ 11. $\sec^{-1} \sec 2$ 12. $\csc^{-1} \csc 2$
13. $\sin^{-1} \sin 3$ 14. $\cos^{-1} \cos 3$ 15. $\tan^{-1} \tan 3$ 16. $\cot^{-1} \cot 3$ 17. $\sec^{-1} \sec 3$ 18. $\csc^{-1} \csc 3$
19. $\sin^{-1} \sin 4$ 20. $\cos^{-1} \cos 4$ 21. $\tan^{-1} \tan 4$ 22. $\cot^{-1} \cot 4$ 23. $\sec^{-1} \sec 4$ 24. $\csc^{-1} \csc 4$
25. $\sin^{-1} \sin 5$ 26. $\cos^{-1} \cos 5$ 27. $\tan^{-1} \tan 5$ 28. $\cot^{-1} \cot 5$ 29. $\sec^{-1} \sec 5$ 30. $\csc^{-1} \csc 5$
31. $\sin^{-1} \sin 6$ 32. $\cos^{-1} \cos 6$ 33. $\tan^{-1} \tan 6$ 34. $\cot^{-1} \cot 6$ 35. $\sec^{-1} \sec 6$ 36. $\csc^{-1} \csc 6$
37. $\sin^{-1} \sin 7$ 38. $\cos^{-1} \cos 7$ 39. $\tan^{-1} \tan 7$ 40. $\cot^{-1} \cot 7$ 41. $\sec^{-1} \sec 7$ 42. $\csc^{-1} \csc 7$
43. $\sin^{-1} \sin 8$ 44. $\cos^{-1} \cos 8$ 45. $\tan^{-1} \tan 8$ 46. $\cot^{-1} \cot 8$ 47. $\sec^{-1} \sec 8$ 48. $\csc^{-1} \csc 8$

當時想過題目是不是太多了，過了幾天，要大家上黑板，沒想到作對的在 40 題以上，以後再也沒有學生問這種問題了。

作這類問題要弄清楚三角函數、反三角函數的定義域與值域，請參閱拙著「數播 80 期四個階段的數學」。能弄清楚，這 48 題是不會很難的，例如在求 $\tan^{-1} \tan 7$ 時，先考慮 $\tan 7$ 的值，7 經約為 $7 * 57.2957^\circ$ ，也就是 401.1° 它的同界角是 41.1° ，所以 $\tan 7$ 為正。所以 $\tan^{-1} \tan 7$ 為正，而反正切的值域在 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ，我們要找的是 7 弧度的等值角度，因為 \tan 的週期是 π ，其等值角度是 $7 + k\pi$ ，其中 k 是整數，而介於 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的等值角度，那就是 $7 - 2\pi$ 。

這分補充教材應該是民國 68、69 年間設計的，以後每年我都要大家作一遍。直至民國 76 年高一新生數學教材改用國立編譯館出版的高中數學標準本，教材刪去了反三角函數，我於 78 年開始就不再教反三角函數了，當然這分題目也就不再要學生作了。民國 89 年數學教材又把反三角函數列入課程標準，這個習作也許值得參考。

當年我作的 48 個答案，是寫在一張我自己設計登記隨堂小考成績的表上。因為學校的成績登記表格子太小不方便，我才印了一些自己用。那個年代的紙張本來就不好，今天已經泛黃了，看了十分親切。我又作了一遍，比對一下全都正確。如果用電腦作也全對嗎？所以就用 gwbasic 來驗證。

Basic 的書我有一本許慶芳編的「IBM PC 電腦入門與 BASIC」，這本書的三角函數只有 \sin 、 \cos 、 \tan 、 atn (Arctangent)，例題不多也語焉不詳，很多電腦書也都一樣，只要不是談數學的專書，對於數學這一節都是避重就輕。道理很簡單，因為作者不是咱們學數學的。

大約半年前我曾用 Gwbasic 作過，當時沒有作出來。最近我發現書架上另有一本 GW-BASIC 使用手冊 (user manual)，是在牯嶺街舊書店買的，當時並不感到有甚麼需要，我不常用 basic，買來只是備而不用，放著罷了。書雖然是在舊書店買的，原持有人好像並沒有用過，全名 Microsoft GW-BASIC Interpreter (for the MS-DOS Operating System) 出版商是 (Microsoft Corporation, PRINTED IN TAIWAN, R.O.C. Copyright, 1979-1986)，它談數學也是低空掠過。它的三角函數也是只有 \sin 、 \cos 、 \tan 、 atn ，可是在它的附錄裡找到了我需要的資料。下面是其中的一部分：

Appendix C

Mathematical Functions

Not Intrinsic to BASIC

Derived Functions

Functions that are not intrinsic to Microsoft BASIC may be calculated as follows

Function	Microsoft BASIC Equivalent
1. SECANT	SEC(X)=1/COS(X)
2. COSECANT	CSC(X)=1/SIN(X)
3. COTANGENT	COT(X)=1/TAN(X)
4. INVERSE SINE	ARCSIN(X)=ATN(X/SQR(-X*X+1))
5. INVERSE COSINE	ARCCOS(X)=-ATN(X/SQR(-X*X+1))+1.5708
6. INVERSE SECANT	ARCSEC(X)=ATN(X/SQR(X*X-1)) +SGN(SGN(X)-1)*1.5708
7. INVERSE COSECANT	ARCCSC(X)=ATN(X/SQR(X*X-1)) +(SGN(X)-1)*1.5708
8. INVERSE COTANGENT	ARCCOT(X)=ATN(X)+1.5708

(為便於引用, 行號乃筆者所加)

.....

我就用 Gwbasic 來設計, 這個程式不難, 初中學生都會的。可是其中的數學就不是初中學生能懂能設計的了, 因為它有很多的數學。

看看最前面三行, $\sin(x)$ 與 $\csc(x)$ 互為倒數, $\tan(x)$ 與 $\cot(x)$ 互為倒數, $\sec(x)$ 與 $\cos(x)$ 互為倒數, 當然都正確, 這裡要考慮的是六個函數

$$\sin^{-1} \sin(x), \cos^{-1} \cos(x), \tan^{-1} \tan(x), \cot^{-1} \cot(x), \sec^{-1} \sec(x), \csc^{-1} \csc(x)$$

的落實。第四行反正弦用數學式來表示就是

$$\begin{aligned} \sin^{-1}(x) &= \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \therefore \sin^{-1} \sin(x) &= \tan^{-1} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \tan^{-1} \frac{\sin(x)}{\text{abs}(\cos(x))} \end{aligned} \quad (\text{A})$$

abs 是絕對值函數 $\text{abs}(x) = x, x \geq 0; \text{abs}(x) = -x, x < 0$ 。

第五行反餘弦用數學式來表示就是

$$\begin{aligned} \cos^{-1}(x) &= -\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi}{2} \\ \therefore \cos^{-1} \cos(x) &= -\tan^{-1} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} + \frac{\pi}{2} = -\tan^{-1} \frac{\cos(x)}{\text{abs}(\sin(x))} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

第六行反正割用數學式來表示就是

$\sec^{-1}(x) = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x) - 1) * \frac{\pi}{2}$ 故得

$$\begin{aligned} \sec^{-1} \sec(x) &= \tan^{-1} \frac{\sec x}{\sqrt{\sec^2(x) - 1}} + \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(\sec(x)) - 1) * \frac{\pi}{2} \\ &= \tan^{-1} \frac{\sec x}{\operatorname{abs}(\tan(x))} + \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(\sec(x)) - 1) * \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$\operatorname{sgn}(x)$ 是符號函數, 若 $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 1$,
若 $x = 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 0$,
若 $x < 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ 。

第七行反正割用數學式來表示就是

$$\begin{aligned} \csc^{-1}(x) &= \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + (\operatorname{sgn}(x) - 1) * \frac{\pi}{2} \\ \therefore \csc^{-1} \csc(x) &= \tan^{-1} \frac{\csc(x)}{\sqrt{\csc^2(x) - 1}} + (\operatorname{sgn}(\csc(x)) - 1) * \frac{\pi}{2} \\ &= \tan^{-1} \frac{\csc(x)}{\operatorname{abs}(\cot(x))} + (\operatorname{sgn}(\csc(x)) - 1) * \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

第八行反餘切用數學式來表示就是

$$\begin{aligned} \cot^{-1}(x) &= \tan^{-1}(x) + \frac{\pi}{2} \\ \therefore \cot^{-1} \cot(x) &= \tan^{-1} \cot(x) + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (\text{B})$$

這個式子不對, 因為 $\tan^{-1}(x) + \cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$ 手冊第八行等號右邊 $\operatorname{ATN}(X)$ 之前少了一個負號。(B) 式應該是

$$\begin{aligned} \cot^{-1}(x) &= -\tan^{-1}(x) + \frac{\pi}{2} \\ \therefore \cot^{-1} \cot(x) &= -\tan^{-1} \cot(x) + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

所以盡信書不如無書, 當然盡信 manual 不如沒有 manual。張系國作打油詩“使用手冊, 就和房事一樣; 好的手冊令你仙仙欲死; 壞的手冊總算聊勝於無” 讓人拍案叫絕。

我根據以上使用手冊的規定設計了 basic 程式, 算出 48 個答案逐一核對, 與反正割 $\sec^{-1}(x)$ 或反餘割 $\csc^{-1}(x)$ 有關的全錯。

所以 manual 裡 6 與 7 的規定有問題, 這兩個式子我沒有看懂, 也不想深究。兩個指令都很繁, 我想要找個簡單的式子來算出 $\sec^{-1} \sec(x)$ 與 $\csc^{-1} \csc(x)$ 。因為 $\sec^{-1}(x) + \csc^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$, $\sec^{-1}(x)$, $\csc^{-1}(x)$ 二者有一個求出來, 另一個也就求出來了。

這兩個式子要如何用 $\sin(x)$ 、 $\cos(x)$ 、 $\tan(x)$ 、 $\text{atn}(x)$ 來表示呢？我在 Johnson and Kiokemeister 著 “CALCULUS with analytic geometry” fourth edition p.331 習題裡找到

$$26. \text{ Prove that } \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{1}{x} \text{ for every } x \geq 1.$$

所以 $\sec^{-1} x$ 可以用反正弦 (arc sin) 來表示, 而由 (A) 可知反正弦可以用反正切 (arc tan) 也就是 atn 來表示, 所以把計算 $\sec^{-1} \sec(x)$ 的指令寫成

$$310 \text{ S} = 1.5708 - \text{ATN}(\text{COS}(X)/\text{ABS}(\text{SIN}(X)))$$

由 $\sec^{-1}(x) + \csc^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$ 得

$$\begin{aligned} \csc^{-1} x &= \tan^{-1} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 - (\frac{1}{x})^2}} \\ \therefore \csc^{-1} \csc(x) &= \tan^{-1} \frac{\frac{1}{\csc(x)}}{\sqrt{1 - (\frac{1}{\csc(x)})^2}} \\ &= \tan^{-1} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \tan^{-1} \frac{\sin(x)}{\text{abs}(\cos(x))} \end{aligned}$$

所以把計算 $\csc^{-1} \csc(x)$ 的指令寫成

$$360 \text{ S} = \text{ATN}(\text{SIN}(X)/\text{ABS}(\text{COS}(X)))$$

再 run 一次, 48 題全都對了。48 個答案作得順利, 都沒有發生 division by zero 的情況, 當然是 1、2、3、4、5、6、7 與 8 的數據特殊。Gwbasic run 得結果與正確答是有誤差的, 例如

$$1. \sin^{-1} \sin 1, 2. \cos^{-1} \cos 1, 3. \tan^{-1} \tan 1, 4. \cot^{-1} \cot 1, 5. \sec^{-1} \sec 1, 6. \csc^{-1} \csc 1$$

六題答案都是 1, gwbasic run 出來的值有 1 與 1.00000400 二種。

$$37. \sin^{-1} \sin 7, 38. \cos^{-1} \cos 7, 39. \tan^{-1} \tan 7, 40. \cot^{-1} \cot 7, 41. \sec^{-1} \sec 7, 42. \csc^{-1} \csc 7$$

六題答案都是 $7 - 2\pi$, 螢幕顯示 gwbasic run 出來的值有 0.71681470 與 0.71681830 二種。

說兩句題外之言, 天王歌星出席影友會, 有個女生問 “像我這樣的女孩你喜歡嗎?” 讓人混身直起雞皮疙瘩, 再一看原來是初中小女生, 大家都能理解, 高中女生不會問這種問題。要過年了, 把女生用起重機舉得高高的, 大聲吼出 “新年新希望”。有個女生喊 “我要嫁豪門”, 電視沒有給她作特寫, 她應該是高中生, 大學生不會說這種幼稚的話。

basic 程式雖然容易，初中生甚至於小學生都會寫，本文的 basic 程式不是初中生、小學生能寫的，因為它有高中的反三角函數。這一節不但高中生，有些理工科大學生都不是很清楚。是那個混球說的“以後都用電腦了，可以不再學數學了”，他的數學不及格，不論他是不是數學系畢業的。

我把 gwbasic 程式與 48 個答案的表附在後面，讀者可以參考。也許學子會問答案表是怎麼作出來的？我作個簡單的說明，要把 48 個 basic 作的 11 位整數帶小數作 key in 是多麼的煩人。所以每計算一個就把它連同題號 write 出去成爲一筆 record，48 筆 record 作一個 txt 的 file，它含有題號與 basic 算出來的答案。這個 file 用 PE3 處理，題號與答案間有一“;”。以下過程學子沒用過 dbase 不必在意可逕行略過。

然後在 dbase III 裡 create 一個 file，含 NO (題號)、NO1 (答案) 與 NO2 (basic 答案)，再 append 前面 basic 作的 txt file，這個 file 有 48 筆 record，其中 NO1 欄 (field) 是空白，把這一欄全部改成 π

replace all no1 with “ π ”

再把我作的 48 個答案逐一 key in。因為 π 已經有了，就很方便，否則在 DOS 裡 run dbase III，要 48 次鍵入 π 的內碼 A36B 是多麼的麻煩。

最後把這個 dbase file copy 成 txt file，再由 PE3 整理，分成兩邊，1-24 題在左邊，25-48 題在右邊。

以上的資料處理過程在程式裡我沒有寫出來，因為不 write 出來，在 run basic 程式時也可以得到 48 個答案，當然列出這個表看的清楚些。

再來看看誤差的問題。兩個表“螢幕顯示 Gwbasic run 得之結果”與“正確答案與 Gwbasic 答案之比較”裡有幾題答案不同，它們是 19、24、25、30、32、35、37、38、41、42。這是因爲 single precision、double precision、truncate、print 與 write 的規定所導致，它不是本文重點，讀者隨便找本 basic 手冊就可以很有概念了。

我於 6 月 17 日開始構思程式，20 日左右完成設計，22 日寫成這篇小文，23 日細讀不止二遍又作潤色，我資質駑鈍，資優人士當然是不需要花這麼多的時間。這段時間我照常是看報紙、電視、吃飯；看報紙和以往一樣只看副刊，國家大事隨便翻翻；體育版與經濟版不看，因爲看不懂。電視當然是西片第一，discovery 與國家地理雜誌次之。自從安裝了有線電視 (第四台) 本地三台電視 (台視、中視、華視) 對我已經不重要了，當然中視熊旅揚的大陸尋奇是絕不錯過的。電視體育只看日本摔角大賽，這種節目不傷腦筋；我常在這個時段裡構思數學或程式或處於半睡、半醒、半養神狀態，只有在一直挨打的勇士還手時才精神大振，全神貫注看電視。文章當然是自己的好，我很喜歡本文。題目不難，思維方式與處理過程讓學子很快掌握重點。至於讀者與學子能不能看到本文，那就不是我能決定的了。

Gwbasic 程 式

```

100 FOR X=1 TO 8
110 S=ATN(SIN(X)/ABS(COS(X)))
120 CNT = CNT + 1
130 PRINT USING "##. ";CNT;
140 PRINT "arcsin(sin(";X;")) = ";
150 PRINT USING "##.#####";S
160 S=-ATN(COS(X)/ABS(SIN(X)))+1.5708
170 CNT = CNT + 1
180 PRINT USING "##. ";CNT;
190 PRINT "arccos(cos(";X;")) = ";
200 PRINT USING "##.#####";S
210 S=ATN(TAN(X))
220 CNT = CNT + 1
230 PRINT USING "##. ";CNT;
240 PRINT "arctan(tan(";X;")) = ";
250 PRINT USING "##.#####";S
260 S=1.5708 - ATN(1/TAN(X))
270 CNT = CNT + 1
280 PRINT USING "##. ";CNT;
290 PRINT "arccot(cot(";X;")) = ";
300 PRINT USING "##.#####";S
310 S = 1.5708 - ATN(COS(X)/ABS(SIN(X)))
320 CNT = CNT + 1
330 PRINT USING "##. ";CNT;
340 PRINT "arcsec(sec(";X;")) = ";
350 PRINT USING "##.#####";S
360 S = ATN(SIN(X)/ABS(COS(X)))
370 CNT = CNT + 1
380 PRINT USING "##. ";CNT;
390 PRINT "arccsc(csc(";X;")) = ";
400 PRINT USING "##.#####";S
410 NEXT X

```

螢幕顯示 Gwbasic run 得之結果

1. $\arcsin(\sin(1)) = 1.00000000$	25. $\arcsin(\sin(5)) = -1.28318500$
2. $\arccos(\cos(1)) = 1.00000400$	26. $\arccos(\cos(5)) = 1.28318900$
3. $\arctan(\tan(1)) = 1.00000000$	27. $\arctan(\tan(5)) = -1.28318500$
4. $\operatorname{arccot}(\cot(1)) = 1.00000400$	28. $\operatorname{arccot}(\cot(5)) = 1.85841100$
5. $\operatorname{arcsec}(\sec(1)) = 1.00000400$	29. $\operatorname{arcsec}(\sec(5)) = 1.28318900$
6. $\operatorname{arccsc}(\csc(1)) = 1.00000000$	30. $\operatorname{arccsc}(\csc(5)) = -1.28318500$
7. $\arcsin(\sin(2)) = 1.14159300$	31. $\arcsin(\sin(6)) = -.28318530$
8. $\arccos(\cos(2)) = 2.00000400$	32. $\arccos(\cos(6)) = 0.28318900$
9. $\arctan(\tan(2)) = -1.14159300$	33. $\arctan(\tan(6)) = -.28318530$
10. $\operatorname{arccot}(\cot(2)) = 2.00000400$	34. $\operatorname{arccot}(\cot(6)) = 2.85841100$
11. $\operatorname{arcsec}(\sec(2)) = 2.00000400$	35. $\operatorname{arcsec}(\sec(6)) = 0.28318900$
12. $\operatorname{arccsc}(\csc(2)) = 1.14159300$	36. $\operatorname{arccsc}(\csc(6)) = -.28318530$
13. $\arcsin(\sin(3)) = 0.14159270$	37. $\arcsin(\sin(7)) = 0.71681470$
14. $\arccos(\cos(3)) = 3.00000400$	38. $\arccos(\cos(7)) = 0.71681830$
15. $\arctan(\tan(3)) = -.14159270$	39. $\arctan(\tan(7)) = 0.71681470$
16. $\operatorname{arccot}(\cot(3)) = 3.00000400$	40. $\operatorname{arccot}(\cot(7)) = 0.71681830$
17. $\operatorname{arcsec}(\sec(3)) = 3.00000400$	41. $\operatorname{arcsec}(\sec(7)) = 0.71681830$
18. $\operatorname{arccsc}(\csc(3)) = 0.14159270$	42. $\operatorname{arccsc}(\csc(7)) = 0.71681470$
19. $\arcsin(\sin(4)) = -.85840740$	43. $\arcsin(\sin(8)) = 1.42477800$
20. $\arccos(\cos(4)) = 2.28318900$	44. $\arccos(\cos(8)) = 1.71681800$
21. $\arctan(\tan(4)) = 0.85840740$	45. $\arctan(\tan(8)) = -1.42477800$
22. $\operatorname{arccot}(\cot(4)) = 0.85841090$	46. $\operatorname{arccot}(\cot(8)) = 1.71681800$
23. $\operatorname{arcsec}(\sec(4)) = 2.28318900$	47. $\operatorname{arcsec}(\sec(8)) = 1.71681800$
24. $\operatorname{arccsc}(\csc(4)) = -.85840740$	48. $\operatorname{arccsc}(\csc(8)) = 1.42477800$

正確答案與 Gwbasic 答案之比較

題號	答案	Basic 之解	題號	答案	Basic 之解
1	1	1.00000000	25	$5-2\pi$	-1.28318600
2	1	1.00000400	26	$2\pi-5$	1.28318900
3	1	1.00000000	27	$5-2\pi$	-1.28318500
4	1	1.00000400	28	$5-\pi$	1.85841100
5	1	1.00000400	29	$2\pi-5$	1.28318900
6	1	1.00000000	30	$5-2\pi$	-1.28318600
7	$\pi-2$	1.14159300	31	$6-2\pi$	-0.28318530
8	2	2.00000400	32	$2\pi-6$	0.28318870
9	$2-\pi$	-1.14159300	33	$6-2\pi$	-0.28318530
10	2	2.00000400	34	$6-\pi$	2.85841100
11	2	2.00000400	35	$2\pi-6$	0.28318870
12	$\pi-2$	1.14159300	36	$6-2\pi$	-0.28318530
13	$\pi-3$	0.14159270	37	$7-2\pi$	0.71681480
14	3	3.00000400	38	$7-2\pi$	0.71681810
15	$3-\pi$	-0.14159270	39	$7-2\pi$	0.71681470
16	3	3.00000400	40	$7-2\pi$	0.71681830
17	3	3.00000400	41	$7-2\pi$	0.71681810
18	$\pi-3$	0.14159270	42	$7-2\pi$	0.71681480
19	$\pi-4$	-0.85840750	43	$3\pi-8$	1.42477800
20	$2\pi-4$	2.28318900	44	$8-2\pi$	1.71681800
21	$4-\pi$	0.85840740	45	$8-3\pi$	-1.42477800
22	$4-\pi$	0.85841090	46	$8-2\pi$	1.71681800
23	$2\pi-4$	2.28318900	47	$8-2\pi$	1.71681800
24	$\pi-4$	-0.85840750	48	$3\pi-8$	1.42477800

以上是作者民國九十一年六月底的作品，其中有二、三行審稿人文字，下面是看了審稿人的意見，又作的補充。

審稿人說：資訊界軟體兩年更新一次，成長速度令人感嘆，現在的數學軟體，可以輕易的算出作者所呈現的問題，底下是 MAPLE 執行的結果，而且是用符號計算 (symbolic calculation) 值表示出來：

```
>for n from 1 by 1 to 8 do
printf("%35s %a %s %a\n", "arcsin(sin(",n,")=",arcsin(sin(n)));
printf("%35s %a %s %a\n", "arccos(cos(",n,")=",arccos(cos(n)));
printf("%35s %a %s %a\n", "arctan(tan(",n,")=",arctan(tan(n)));
printf("%35s %a %s %a\n", "arccot(cot(",n,")=",arccot(cot(n)));
printf("%35s %a %s %a\n", "arcsec(sec(",n,")=",arcsec(sec(n)));
printf("%35s %a %s %a\n", "arccsc(csc(",n,")=",arccsc(csc(n)));
end do;
```

結果與我的〈正確答案與 Gwbasic 答案之比較〉表中之「答案」欄完全相同，就不必列出了。

我由 Gwbasic 手冊公式 6 與 7 作設計求 48 題的解時，反正割與反餘割的指令各為 310 與 360

```
310 S = ATN(X/SQR(1/COS(X)*1/COS(X)-1))+SGN(SGN(1/COS(X))-1)*1.5708
```

```
360 S = ATN(1/SIN(X)/SQR(1/SIN(X)*1/SIN(X)-1))+(SGN(1/SIN(X))-1)*1.5708
```

有關的 12 題答案都不對，所以改用自己找到的公式，求出反正割與反餘割的 12 題正確答案。用審稿人的公式，指令 310 與 360 改成

```
310 S = 1.5708-SGN(1/COS(X))*1.5708+SGN(1/COS(X))*ATN(ABS(TAN(X)))
```

```
360 S = SGN(1/SIN(X))*(1.5708-ATN(ABS(1/TAN(X))))
```

得各題之答為

(5)	1	(6)	1.000004	(11)	2.000007	(12)	1.141596
(17)	3.000007	(18)	.1415962	(23)	2.283193	(24)	-.8584109
(29)	1.283185	(30)	-1.283189	(35)	.2831853	(36)	-.283189
(41)	.7168147	(42)	.7168183	(47)	1.716822	(48)	1.424782

和我作的比對，至小數第五位或第六位才有誤差，也就很滿意了。

審稿人又說：反三角函數只能藉由 arctangent 來計算，那是 15~20 年前的事，現在藉由 Gwbasic 以 arctangent 來算其他的反三角函數值，大概有很多人會搞不清楚為什麼要這樣做。

我想 GWBASIC 作與 MAPLE 作是不一樣的，前者適合高中生，後者適合大學生。二者有差別，前者“數學內涵”多，後者完全不懂反三角函數，也一樣可以作，作了以後大腦一片空白。例如測試 1237 是否為質數，使用 Mathematica 來作，求 PrimeQ[1237] 的結果，馬上就可以知道它是 true 或 false；寫個 Basic 程式，用小於或等於 1237 的平方根的質數來逐一試除，都不能除盡，所以 1237 就是質數了。二者感受不同，前者初中生就可以作了，後者要高中生才能設計。吃甘蔗與喝甘蔗汁也是不同的，後者沒有感覺，前者有成就感。

不談使用電腦與否，這 48 題高中生學反三角函數時應該作一作。所以審稿人說「.. 那是 15~20 年前的事..」我是期期以為不可。而審稿人「..MAPLE 執行的結果，.. 是用符號計算 (symbolic calculation) 值表示出來」至少對初學反三角函數的高中生來說是沒有意義的，至於一般的大學生，因為審稿人又說「目前大學一年級學生，反三角函數概念清楚的，實在不多..」，所以「符號計算 (symbolic calculation)」對「目前大學一年級學生」來講意義也不大。MAPLE 的作法是數學家、數學老師、大學理工科資優生用的，他們的數學有相當程度，至少對反函數、反三角函數有很清楚的認知，使用高階語言 MAPLE 才有意義。

本來我以為審稿人是剛拿到學位的老師，才會有這種想法，可是他用了「.. 一對一旦映成..」的文字，所以他在讀高一時是在民國 54 年至 62 年間 (54~62)，因為那時本地高中都是用的東華本，也只有這幾年才用這種文字，以後都用「.. 對射且蓋射..」了。所以審稿人的年紀應是 45~53 之間，也是資深有經驗的老師了，對本人看法也許不能欣然同意，至少也會坦然接受。教材教法很是敏感，因為它是見人見智的事。

審稿人說：目前大學一年級學生，反三角函數概念清楚的，實在不多。檢討過去高一下的數學課程，三角函數從和積互化公式開始，到正餘弦函數之疊合、棣美弗定理、1 的 n 次方根。課程幾乎用趕的，在學生資質中等的學校，教得真是辛苦。新課程實施之後，加入反三角函數的教學，更是雪上加霜，我們迫切需要有更簡單、明瞭、直觀的教材，數學老師要更用心的把它說明清楚，是不爭的事實。

甚麼都可以速成，只有學問不能速成。本文與拙著「四個階段的數學」原載「數播 80」或可為「我們迫切需要有更簡單、明瞭、直觀的教材」之缺失稍作棉薄。

公式 8 等號右邊少了一個負號，審稿人把它與自己發現的公式 6 與 7 都作了證明，因為都是用圖形來證的，簡潔又漂亮，我把它納入本文。

審稿人的公式 6 和證明

$$\sec^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi}{2} + \operatorname{sgn}(x) \cdot \tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1}$$

證明:

因爲 $\sec^{-1} : \{x \mid |x| \geq 1\} \rightarrow \{y \mid 0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}\}$

$\tan^{-1} : \{x \mid x \in R\} \rightarrow \{y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$

由右圖 (1) 可以看出, 當 $x \geq 1$ 時, $\sec^{-1} x = \tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1}$

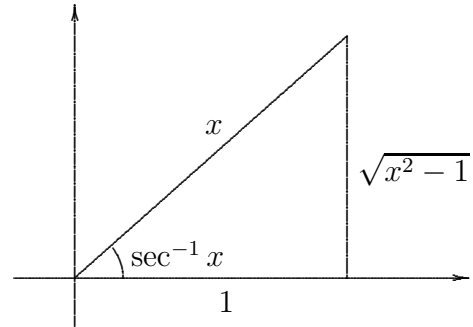


圖 1

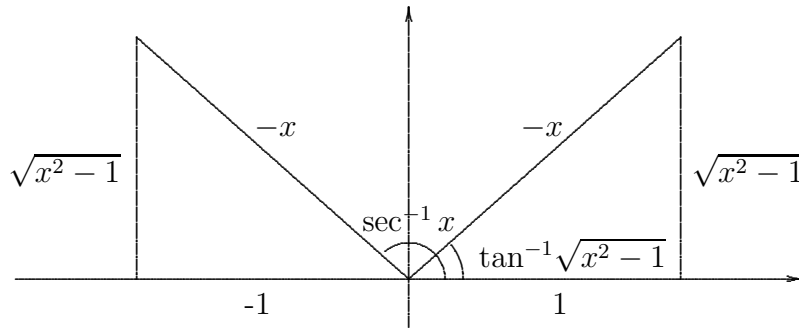


圖 2

由上圖 (2) 可以看出, 當 $x \leq -1$ 時, $\sec^{-1} x = \pi - \tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1}$

我們取 $(\tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1})$ 與 $(\pi - \tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1})$ 的算數平均數 $\frac{\pi}{2}$ 爲中心, 用 $(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1})$ 的差量以 $\operatorname{sgn}(x)$ 來調整, 就得到公式:

$$\sec^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi}{2} + \operatorname{sgn}(x) \cdot \tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1}, \quad \text{其中 } |x| \geq 1$$

審稿人的公式 7 與證明

$\csc^{-1}(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot (\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1})$, 或

$\csc^{-1}(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} (|x| \neq 1)$

當 $x \geq 1$ 時, 可用右圖 (3) 表示, 當 $x \leq -1$ 時同理可證。

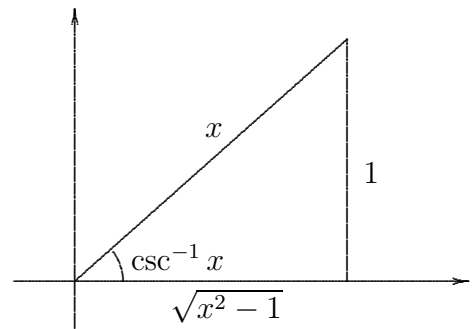


圖 3

審稿人證明公式 8 (原文等號右邊少一負號)

由下圖 (4), 當 $x > 0$ 時, 容易看出 $\cot^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ 的關係

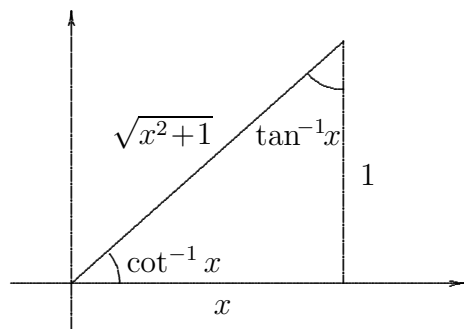


圖 4

當 $x < 0$ 時, 如圖 (5), $\cot^{-1} x$ 是個鈍角, 它的終邊落在第二象限, $\tan^{-1} x$ 是一個負角, 終邊落在第四象限 $\cot^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ 的關係依然存在。

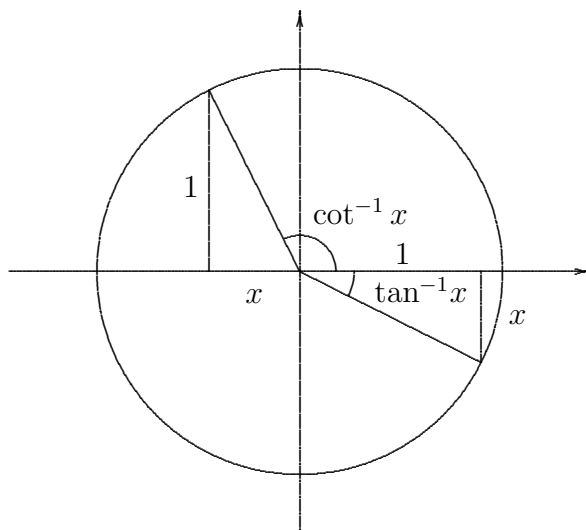


圖 5

當 $x = 0$ 時, $\cot^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ 也成立

—本文作者執教建中現已退休—