

有朋自遠方來——

專訪 László Lempert 教授



策劃：劉太平
訪談：李華倫
整理：李華倫
時間：民國九十二年九月
地點：中央研究院數學所

László Lempert 1952年出生於匈牙利的布達佩斯。高中時代得到匈牙利最重要最古老的數學競賽 Kurschak competition 首獎，並曾代表匈牙利參加三次國際數學奧林匹亞競賽，分別得到一次二等獎及兩次三等獎。Lempert 教授是在沒有人指導之下靠自己努力從事多元複變幾何方面的研究並得到卓越的成就，於1981年獲得匈牙利數學會頒贈 Grunwald Prize, 1985年獲得匈牙利國家科學院頒贈 Alexits Prize 並於2001年獲得 Bergman Prize, 目前是美國普渡大學 (Purdue University) 數學系教授。這次訪談是以 Lempert 教授在匈牙利的求學經驗，參加數學競賽訓練經驗及對數學教育、教學看法為主。

一. 孩童時代

李華倫 (以下簡稱“李”)：請談談一開始如何喜歡上數學的。

Lempert (以下簡稱“L”)：好的，讓我說個故事，是在我入小學前的故事，那大約是我四、五歲的時候。當時有個語言遊戲在小孩之間流傳著，這個遊戲是這樣子的：六分之十加六分之十是多少？當然答案是六分之二十，你可能不相信但在匈牙利語中“六分之二十”聽起來聲音完全就像“拉我耳朵”。所以小孩喜歡問另一個小孩六分之十加六分之十是多少？被問的小孩一回答六分之二十就會被提問的人拉耳朵，而我發現我可以避開它如果不說“六

分之二十”而說“三分之十”，“三分之十”在匈牙利語中就沒有任何諧音。這可說是我第一次發現數學的威力。

李：這是在小學前嗎？

L：是的，這個發現可以說是我當時的最佳成就而且維持了好一陣子。然後我仍然喜歡數學但並沒有特殊表現可以讓我覺得比別的小孩強，一直到小學最後一年，在匈牙利那是14歲，我才清楚自己在解決數學問題上有不錯的能力而且非常喜歡數學課。

李：當時你的計算能力好嗎？

L：不，不，我所謂數學能力好不是指計算能力。事實上我的計算一向不太好，我也因此吃過很多苦頭，像說學校數學成績最高分是5分但我只得4分原因就是我的計算不夠好。我想我倒是有個解釋是關於為什麼數學能力好與計算能力不好並不衝突。這種現象在我做研究時也看到。所以當您想要了解一些數學問題時一種方法是一開始先從大處著手。可能你會有一個大概的、粗略的想法而不會太在意細節。而另一種方法就是直接進入細部，嘗試研究、了解細節。就我而言，也不只是我，有很多人做研究都是像這樣，當我想要解一個數學問題我會先試著去了解問題的全貌。一旦我知道有哪些事情、哪些步驟必須先做才能解決整個問題，我會或多或少忽略了確實去完成那些步驟。對於一些我後來發現比較有挑戰性的問題，計算常常只發生在細節分析的時候，我常常會沒有注意到他們，而已經在思考下一個步驟——所造成的後果是使我犯了錯誤，而且遺漏了很多計算。在定理證明的過程中——也就是如何從假設推演出結論——我常常會設想出一些步驟來連結前提與結論，雖然當時我可能不太確定這些步驟都是正確的，但如果它們是正確的話，則我便知道如何得到最後的答案、最後的結論。明顯的，在這個階段定理尚未得證。但是我會有一些滿足感，因為多少我對那個問題有了一些了解。可是出乎意料的事情也常常發生在我身上，也就是我設計的步驟有時可能並沒有成功的證出最後結論，當然這就表示中間步驟有問題，我也只好重新檢查所有細節，一旦發現有所遺漏就必須重新修改證明路線。

李：是否能舉例說明。

L：好，就拿一個小學數學問題來當例子：假設你要做一張桌布來覆蓋一張長一百二十公分、寬五十五公分的桌子，而且要求桌布在桌子長的兩端懸垂十公分，寬的兩端懸垂十五公分。那麼這張桌布長寬該是多少？我記得這個問題是因為當時我們班上三十幾個小孩中只有兩個人正確地解出答案。大部分小孩的錯誤都是他們沒有考慮到桌子四邊都應該有桌布懸垂下來，所以他們都只將桌子長度加上十公分寬度加上十五公分，那就不對了，應該加上兩個十公分和兩個十五公分。好，我知道是這樣但我可能會不小心將二乘十或加法算錯。

李：那你是如何發現自己有數學方面的天賦呢？

L：當然，一直到了中學最後幾年，大概十六、十七歲。匈牙利有很多不同的方式來偵測小孩是否有科學的天賦，尤其數學。首先我們有很多不同的競賽，這些競賽從學校內的比賽開始。

二. 數學競賽與數學圈

李: 這些競賽是開放給所有學生參加嗎?

L: 是的, 任何人都能參加學校等級的數學競賽, 由學校老師負責改考卷, 有些是蠻長的問題, 時間大概四小時有時甚至五小時來作答。

李: 你第一次參加數學競賽是十一歲嗎?

L: 不, 比較像是在十四歲, 大概八年級中間的時候, 也就是在匈牙利小學的最後一年。

李: 在台灣大概是初中生。

L: 在匈牙利我們只有小學和中學, 前八年是小學, 然後是中學, 現在系統則有些改變。

李: 當你參加競賽時, 題目內容都與學校所學相關嗎?

L: 基本上是從我們在學校所學的內容來出題。但這種競賽題目的設計主要是看學生有沒有創意, 而不是數學知識是否豐富, 所以解答這些問題不需要懂太多知識但是需要比較多的創造性思考能力, 有些問題更是需要不同層次的洞察力及靈巧的思考。當時我並不知道, 後來才了解那些出題目的人會試著出一些以較簡單的題目搭配一些較難的題目, 讓很多小孩覺得他們可以解出一到兩題但是另一方面還是要有困難的題目使得三題全對不容易達到。我自己是在小學最後一年開始參加這種數學競賽。

李: 你當時表現得很好嗎?

L: 一開始並不是很好, 一部分原因就是我們前面提到的計算能力, 另外的原因則是當時我也不太清楚何謂數學證明。我記得八年級時我在數學上的聰明已經在我們班上, 甚至我們學校小有名氣, 當時我參加了十四歲級全國數學競賽。

李: 有多少人參加?

L: 大概一兩百人。整個過程是這樣子的。數學競賽有兩輪, 第一輪所有人都能參加, 它是在學校舉行由學校老師來改, 有相同的給分規則。那些答對題數在一個標準之上的試卷會集中到改卷中心再檢查。依據第一輪的表現結果大約八十或兩百或甚至更多的學生會被選中去參加第二輪決賽。這些比賽是真的為全國設計的。匈牙利有十六個行政區, 每個行政區都有個行政中心城市。我記得第二輪決賽就在這些行政中心城市舉行。是由行政中心城市中的一個學校, 布達佩斯也有, 負責邀請那些在第一輪表現優秀的學生來參加, 然後大家在同一個時間解相同的三個題目。

李: 就三個問題嗎?

L: 是的, 三個問題。我之所以提到那次比賽是因為我想告訴你一個我不太光彩的經驗。那三個題目中有一題我還記得是一個幾何問題, 關於如何證明一個直角三角形有一角是三十度等等。但是我解這個問題的方法證明了當時我不懂什麼叫數學證明。我的作法是畫了一些

輔助線，當然這還好因為幾何證明常這樣做，但是接下來我拿了一支有刻度的尺，量了量輔助線的長度並說明它符合一些關係，再從這裡推論，後面推論倒是沒有錯，我推論出題目要求的結果。在考試當中。我知道這樣不太對但不大確定。然後我騎腳踏車回家將我的答案告訴我的父親，他不是數學家但對數學蠻有興趣的，他也不相信那會是正確的作法。當然，那一次我沒有得獎。但我想那次就像一個轉捩點，從此之後我想我了解了幾何證明的標準，然後我持續地參加這個數學競賽一直到我上大學。

李：每一年都參加？

L：是的，中學時每年都參加。有時一年還不只一次。匈牙利有好幾種數學競賽，最有歷史的是 Kurschak 競賽，從十九世紀末就開始。以二十世紀初一位數學家、也是有名的數學教師 Kurschak 為名的數學競賽，我曾經獲得這個競賽的首獎。這個競賽原先是為高中畢業生設計的。如果你看看這個競賽歷年首獎名單，你會看到一些赫赫有名的人物，如數學家 Riesz, Teller 泰勒氫彈之父，Eugene Wigner 也是一位諾貝爾獎得主等等很多人。唯一一位我很訝異沒有在名單內的是 John Von Neumann 一位最偉大的匈牙利數學家。可能是有什麼原因他未曾得到這個競賽的首獎，一個可能的原因是他中學畢業後就到瑞士去繼續學業，競賽舉辦時他已經到了瑞士所以沒有參加。詳細情況我不知道，但這件事之所以令人感到非常奇怪，不只是因為 Von Neumann 後來成為不可思議的偉大數學家而且孩童時他便是位天才，所以大家認為他會得、也應該得這個競賽的首獎。

我剛才提到這個競賽最早是為中學畢業生設計的，然而在某個時間點它便開始開放給全部中學生參加。你可能認為低年級學生不可能有機會贏但其實常常發生得獎者不是畢業生反而是 12年級或 11年級甚至更低年級的學生。這個 Kurschak 競賽是所有一年舉行一次數學競賽中最高等級的，另外還有一個 15歲學生參加的數學競賽，一個 16歲學生參加的數學競賽，和一個 17, 18歲學生參加的數學競賽而剛才談的最老的 Kurschak 競賽現在已開放讓所有人參加。

李：除了數學競賽還有其他發掘或培養有數學天份學生的方法嗎？

L：除了數學競賽外還有一種有價值的，相關的配套，而且也是在 19世紀就開始，那是一個期刊 “High School Mathematical Journal” 它有三個功能。第一個功能是提問題，每個月它都會提出一些問題，兩類問題，一類簡單而另一類比較難，然後解出問題的學生可以將他的解答寄給編輯，編輯會改這些解答而且一題題給分。一年結束的時候會有全年得分的排名，排名在前面四分之一的學生有獎。第二個功能是解答老的問題，經常編輯會將學生的答案稍微修改然後刊登出來，並在答案後面列出學生名字。第三個功能和解題沒有關係，主要是一些數學文章，談一些非常基本的數學，一些中學生可以懂的數學。這個期刊對我小時候在數

學方面的發展扮演著非常重要的角色。而除了這個期刊外還有數學圈，當時青少年的數學圈有兩個，一個專門討論如何解題。我想我第一次參加這個數學圈是在我八年級的時候，也就是十四歲。這個數學圈在布達佩斯，我居住的區域還有其他一些區域中，是蠻重要的事情。被視為是比較有天份的小孩都會被邀請參加，我們每週或隔週都會在某一個下午聚在一起兩小時到三小時，由一位教授主持，主要是談如何解數學問題。執行的方式是每次我們會拿到一些題目且必須在下週交出答案並加以討論，有時我們會將自己的解答寫在黑板上討論有時直接由教授說明答案。

李：在這個數學圈你們會學到比較深的數學，像微積分嗎？

L：我們並沒有看到太多微積分，微積分在匈牙利並不像在美國那麼被重視。但是說實在的，我們在中學所學的微積分，從某種角度來看，比我們現在在美國大學教的微積分更深入些，當然涵蓋的範圍比較小。

李：所以你的微積分不是在大學學的。

L：在匈牙利，微積分要不要在中學教這件事一直改來改去。我則是在中學最後一年學到一點微積分，我們學到極限、學到連續性、學到切線也學微分。但並不是所有中學生都如此，一年一年不一樣，也因為這個原因微積分問題從來沒有在我前面談的數學競賽中出現。

李：那麼在這個數學圈裡你們有學一些數學定理嗎？還是只是單純的解題呢？

L：我不認為我們學了任何數學定理，至少不是現今數學書本上的所謂定理，但是我想最終我們學到比較一般的、關於如何解決各種不同類型問題的方法。舉例來說，我們在中學不管是課堂上所學的還是數學競賽都非常強調幾何學、幾何證明，及歐式幾何的尺規作圖然後我們會學一些比較具一般性的方法。比如說吧，像反演 (inversion) 這個數學觀念，如反演圓中的圖形可能可以簡化那個圖形，像說可以將某些圓形變成一條直線而直線比較圓形是簡單了些。所以我們學了像這種對圓的反演觀念，這可以被視為是一個數學定理，像這種形式我們也學了如數學歸納法，我不覺得那是個定理可能比較像是個非常普遍的工具吧。我們學到非常多的例子關於如何運用數學歸納法，但我不記得有任何現在所謂的定理。或許到最後，那些在數學圈所討論的問題是可以讓我們這些學生一窺一整組有系統的數學觀念與想法。

李：完成一個問題後指導的教授會教你們如何推廣那個問題嗎？

L：當然，而且是很早就學到這樣的觀念。“推廣”可以說是數學的基本要素，看看你可以將你對問題的了解推得多遠。至於“推廣”到底可以為我們做什麼？在當時並沒有清楚的交代，但是現在我倒是有自己的看法：在所有數學中，或說在數學研究中的努力，我們非常希望能全面的了解整個世界，可惜世界實在太複雜無法全面了解，所以當我們好不容易瞭解了一個點一個角落我們都會希望從這個角落推廣出去，或許真的可以讓我們瞭解這個世界更大的一

部份。回到我們前面談的數學競賽，當裁判要決定誰贏得競賽時，全部三個問題可能有兩個或三個學生可以完全解出來，那該如何決定名次？好吧！如果有學生可以推廣並得到有趣的結論那他就會得到加分。

除了學習推廣之外，在數學圈我們還學習如何寫答案。學生有了解答的想法之後有很多不同的方式可以把它寫出來，你可能寫的非常優雅也可能寫的非常凌亂。競賽裁判也常常以寫作的優雅與否決定誰是首獎、誰是第二獎和誰是第三獎。在優雅寫作的部份我的表現不是非常的好，但因為這樣的訓練我一直都非常欣賞優雅而且言簡意賅的數學作品。當時可能是因為我這方面表現不是很好我覺得這樣來評定名次不太公平，那時我覺得最重要的就是如何得到答案。現在我的看法就不一樣了，整體而言這些競賽、這些評分辦法、這些獎項還有其他一些事情其目的都是為了在我們這些學生（未來科學家）身上奠定並加強一些“價值”，清晰解釋想法的能力在科學研究中有非常重要的價值（但是當然不只科學是如此）。歷史上有一些偉大數學結果隱藏了很長的一段時間或是它的作者沒有得到適當的賞識就因為這些結果表達的方式非常不容易讓人了解。因為這樣的原因現在我非常感謝當時的評審，因為他們重視優雅的寫作或多或少影響到我，我會要求自己嘗試著寫好一點。

李：但是寫作優雅與否是很主觀的事情，不同的評審會不會有很不一樣的結果？

L：是的，這取決於評審。雖然到了競賽最後一輪所有的問題由相同的人來改而且到了最後，前十名的答案卷都必須由所有評審委員看過，但還是難免有一些主觀上的問題。

李：若學生贏了競賽，對他有什麼好處？我的意思是除了獎品之外會不會保送他上大學？

L：如果你贏了競賽當然你會得到獎品，獎品可能是金錢，書本或是一些數學方面的書。而且如果你是前十名那你一定可以進入匈牙利任何一所大學的數學系或物理系就讀，而不用參加要求嚴苛的大學入學考試。

李：嗯，好像蠻有吸引力的。

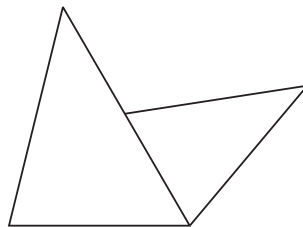
L：我們先前談到有兩個數學圈，另外一個數學圈與解題無關，倒是與你剛才提的定理學習比較接近。在這第二個數學圈裡我們聽到關於數學的演講，大概都是兩個小時的講演，我印象中參加這個數學圈的學生大家會在學校放假時聚在一起，尤其是寒假或春假，不光是住在布達佩斯的學生受到邀請，連住在鄉村有天份的小孩也會被邀請來參加，他們的花費都會被支付而且可以住在大學的學生宿舍。在這個數學圈的演講談到一些數學定理，我記得有一場演講對我產生巨大的衝擊，我覺得它實在非常非常的有趣而且到現在我還嘗試著重現那場講演的内容，時間大概是我十六歲的時候。内容是關於一種拓樸性質，它是關於平面上的向量場，這個向量場上的零點及旋轉。給定平面上一條封閉曲線，你便可計算向量場在這條曲線上旋轉了幾圈，那麼這圈數只可能是整數，當然這是在我們假設這條曲線沒有通過向量場的

零點而且向量場本身連續, 在這種情況下我們知道旋轉數或稱繞數是個整數, 另一方面如果曲線變化一下這個繞數會隨之連續變化, 整數的變化要連續的話, 唯一可能就是它們一直是相同的整數, 換句話說此繞數與曲線無關。從研究一些繞數的性質你就可以證明一些深的定理如代數基本定理, 也可以進入曲面上的尤拉特徵數, 首先將尤拉特徵數轉換成一些向量場的零點來表現然後證明曲面, 應該說封閉曲面, 本身的不變特徵。當時那位演講者是一位大學生也可能剛從大學畢業, 他講的非常清楚而且能力很強, 對我產生非常大的震撼。你可能想問還有什麼定理, 我想起另一個演講比較起來就顯得無趣多了, 但當時我不大曉得。那是一個關於牛頓與英國數學家 Gregory 之間的爭論 (kissing problem), 先給定三度空間中一個單位球然後問可以造出多少單位球來和這個給定的單位球相碰而且造出來的球之間又不會重疊。

這個數字是 12, 12 個單位球和給定球相碰的情況很容易設計出來, 但是這個結構或說佈局並非嚴格不動的, 佈局中是有空間讓你可以扭動這些球而仍滿足要求, 也因此牛頓和他的對手有一方認為有可能設計出 13 個球的佈局但卻沒有人弄得出來。這不是非常有趣的問題而當時有一個 2 小時的演講談這件事, 我已不記得最後是否..., 應該是個未解決的問題吧! 像這樣的演講是讓我們知道一些數學的事情但實在無法和前面提到介紹拓樸的演講相提並論。另外還有一些演講談到重要的定理, 如固定點原理 (Brower's fixed point theorem), 有一個證明用到組合學的方法及 Sperner's lemma。要我談談什麼是 Sperner's lemma 嗎?

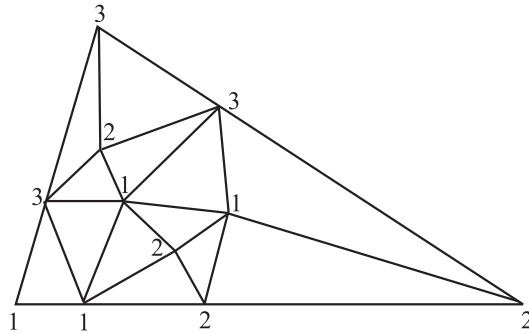
李: 當然, 請說明一下。

L: 好, 首先你畫一個三角形, 然後你將它劃分成更多小三角形, 但也不是任意劃分, 規則是任意兩個小三角形之間只可以完全不相交或有一些相同的頂點或有一些相同的邊這三種情況, 像圖一就是不允許的。



圖一

我們對一開始三角形的三個頂點加以編號, 像這樣 1、2、3 (見圖二) 編號。



圖二

接著也用 1、2、3 由外往內對其他小三角形的頂點進行編號，規則是在兩端頂點編號是 1、2 的邊上的點只能用 1 或 2 來編號，同樣的在頂點編號是 2、3 的邊上的點只能用 2 或 3 來編號除了這個規則之外你可以自由地安排，全部編號完成之後我們可以斷言一定存在一個小三角形它的頂點編號也是 1、2、3。事實上不只是有一個這樣的小三角形而且可以證明有奇數個小三角形的頂點編號是 1、2、3。然後這個性質可以用來證明 Brouwer's 固定點原理。另外在這個數學圈還有演講是關於正多邊形，如何尺規作圖畫出正多邊形，還有高斯定理，事實上這是我給的演講，我想那是我大學剛畢業的時候我回到我少年時參加的數學圈，而且給了個演講談高斯造十七邊形的方法。

李：哦！你也在那裡演講。

L：是的，這也是這個數學圈運作的方式。在聽眾席上的小孩最終會找到他們的路回到講台上。

李：難道沒有演講內容太困難，學生聽不懂的嗎？

L：哈哈，這種事到後來我參加數學研討會才開始發生。在這個數學圈則沒有這種情況，我想沒有一個演講是我完全聽不懂的。當然有些演講我完全了解但也有些演講我不感興趣或有些部份我沒跟上。但是我要強調整個數學圈設計的目的就是要從基本的素材談有趣的數學，絕不能假設下面的聽眾有很好的、紮實的數學知識。演講的人必須設想聽眾只知道什麼是整數，什麼是可除性，什麼是三角形，什麼是圓錐曲線等等這些非常基本的素材然後使用它們。

李：所以也沒有演講者會談到自己的研究。

L：沒有，沒有。但是可能演講內容和演講者的研究多少有點關聯吧。當然除了這些數學圈，重要的數學活動就是國際奧林匹亞數學競賽了。

李：台灣曾主辦過國際奧林匹亞數學競賽。

L：是的，我知道台灣幾年前主辦過。

李：你參加過嗎？

L: 是的,基本上奧林匹亞數學競賽是中學生參加的,主要是16,17,18歲的學生,有時也有15歲或14歲學生參加但非常少見,一般說來小孩是否有數學方面的天份到了16,17歲時就很清楚了。

李: 當時是不是有甚麼特別培訓計畫?

L: 是有一個訓練營,但是一開始我並沒有參加是後來才加入這個專為奧林匹亞做準備的數學圈,然後我們每週六下午見面大約2到3小時,也是討論如何解題。方式是由老師,一位大學教授,提出問題然後我們大家開始想,誰先解出問題就上台解釋有時也由教授講解。當別人解釋他的方法時你有不同的想法也可以提出來討論,最後還有3到5題讓我們回家想,下週六再討論這些家庭作業。如此一整年,到了7月初學校停課後我想就已經確定誰在代表隊內。因為這個數學圈,這個一整年都在運轉的數學圈不止代表隊成員參加,事實上誰被選入代表隊取決於在6月舉辦的全國數學競賽中誰的表現好。然後6月底開始就是更緊密的訓練,我記得每天從9點到下午1點。看起來很辛苦的工作但在我生命中卻是非常愉快的一段經驗。

三. 以數學為職志

李: 所以你在中學就已經決定以數學為一生的事業了嗎?

L: 事實上更早我就知道我想成為科學家,中學的時候有一陣子我考慮的是物理。我也參加了物理競賽,成績沒有像數學競賽表現得那麼好。但對我來說非常容易就可以進入第二輪競賽,有時也得到一兩個獎項,物理競賽中我雖然沒有得到首獎但在全國物理競賽中我得過第二獎。當時如果你要進大學就必須參加不同主科的入學測驗但如果你贏得數學競賽就可以免去數學和物理兩科的考試,自動以滿分計算。以我的情況來說,要主修數學就必須要考兩科,數學和物理,都因為我贏得數學競賽而免除。

李: 當時你的父母會不會非常期待你在數學比賽中有好的表現?

L: 我在數學競賽的表現他們當然是非常的高興。我的父母都是大學化學系的教授而且我的父親在決定他的事業時也曾考慮過數學,雖然我得獎時他們沒有送我摩托車但我確定他們是非常的高興。事實上我可以告訴你,在一個關鍵的時刻我母親曾經幫過我的忙。是關於奧林匹亞數學圈,當時那位負責的教授是我母親大學的同事,我母親在化學系他在數學系,有一次他們在午餐時談事情我母親順便提到她的小孩十四歲對數學非常有興趣目前參加數學圈是不是有可能進入更核心的、為奧林匹亞準備的數學圈。那位教授說: 好啊就讓他試試。這個數學圈是為15歲,16歲小孩設計的所以我成為其中最年輕的。也因為我比別人早一年進入數學圈所以後來進入大學並不困難。我大學同學大概五十位也有一些沒有贏過數學競賽,是通過入學考試進入大學的。

李：你當時的同學有很多成爲傑出的數學家嗎？

L：是的，他們有一些是非常有名的數學家。今天我們談的這整套尋找及幫助發展有數學天份小孩的機制是非常成功的，但我懷疑是不是會繼續如此，因爲現在有很多學門、領域在和數學競爭。以前如果你是個有創造力的小孩，並沒有很多領域可以發揮你的創造力，就以科學方面來說吧，要成爲一位化學家或生物學家那你必須學很多很多東西，在數學的話你只要學一些基本的東西然後就是靠你靈巧的創造力來把東西組合起來。但是現在像電腦科學也是需要靈巧的創造力，三十年前選擇數學的人在這個時代可能會選擇電腦科學。二十世紀後半段有大部分時間在東歐有一種奇怪的現象，很多工作有被“意識型態”嚴重影響的情況，如果你的想法和政治當權者不一樣你就沒有資格從事那些工作。如經濟學方面，一些自然科學，哲學：他們的主要工作就是證實當權者的正當性。但是數學不一樣。可能是因爲它對我們社會沒有直接的影響所以當權者比較不擔心數學界及研究數學的人。

李：能否談談怎樣的機緣讓你決定進入多元複變函數的研究？

L：我非常的幸運，對多元複變的興趣可以追溯到我參加國際奧林匹亞數學競賽的時代，當時有位教授他是數學訓練營的領導者，他指導數學訓練營已經有好多年了他非常的棒，但在我十年級那一年他正好休假，來了一位年輕的助理教授 Miklos Simonovits 代替他的工作。這位年輕的助理教授風格完全不同也非常傑出，到我上了大學時他可以說是我的良師益友。我在大一的時候他覺得我們班上幾個程度比較好的同學應該讀一些比較有挑戰性的東西，他建議我們讀複變數分析，這個課程一般是到大三時才學的。所以我們就拿起一本書開始讀，這樣到了大一快結束時我已經喜歡複變數分析了，然後大概過了一年他又建議多元複變。他本身是分析系的助理教授，在匈牙利我們有非常多不同的數學系（到現在還是如此），都是小的系，我們有代數系、幾何系、離散數學系、兩個不同的分析系、機率系等等。

李：這很令人訝異，每一個系都有自己的學生嗎？

L：不，不，學生不會註冊在不同的系。但不同的課程由不同的科系來開課。整個有一個數學中心像是所有這些系的大傘，在它之下這些系自己獨立的運作。不管怎樣，他雖然在分析系但卻從沒做過分析方面的研究，Miklos Simonovits 是個非常優秀的組合學家但也對分析非常了解，我從他那裡學到非常多的分析。當時是因爲匈牙利一位偉大的解析數論學家 Paul Turan 告訴他多元複變是個非常有前途的領域所以建議他研究多元複變。他自己讀了一些多元複變，他知道 Hörmander 的書、Gunning 和 Rossi 的書，也了解其中一些部分，他知道的部分他了解得非常澈底，但還是有很多他完全無法了解，最後他覺得他不適合從事多複變的研究還是繼續研究組合學，但是他仍然認爲多元複變是個非常有趣的領域，所以他就建議我試試這方面而我當時也覺得自己適合往分析方面發展因此就開始讀多元複變。剛開始他幫我很多忙，然後到了一個階段後他無法繼續下去我就開始完全靠自己了。

李: 那個階段你完全沒有別人可以請教嗎?

L: 沒有, 剛開始我研讀的方式就是想辦法從書本及研究論文中體會作者的意思, 接著在我做研究剛開始的階段真的必須靠自己找到答案, 事實上有時候光了解問題就要思考很久, 有時我得到錯誤的答案, 有時我想解決的問題實在太困難了, 當然有時候我也得到喘息的機會而真的解出一些好的、有意義的問題, 所有各式各樣的情況我都碰到過。當時我也不覺得一定要有人指導才能夠做多複變的研究, 我開始的方法就是拿單複變中的問題問我自己相似的問題在多複變中是否成立, 例如有很長的一段時間我一直以為單複變的保角映射定理 (conformal mapping theorem) 可以直接推廣到多複變, 當時我是警覺到怪怪的, 有一點小問題但我還是覺得基本上應該是對的, 兩個簡單連通開集合 (simply connected domain) 應該是複解析全等 (biholomorphically equivalent), 我當時甚至有自己的證明, 雖然不完整有一些小問題待解決但我當時覺得很有希望, 過了一陣子我讀了一些文章然後我才了解我認為是小問題的部分其實是個很大的錯誤。我當時的證明方法用到一個向量場 (vector field) 的性質就是在某些流型 (manifold) 上兩個任意的向量場它們的 Lie bracket 都會是零, 但是一般來說並不是如此 (這裡我們就不談什麼是向量場、什麼是 Lie bracket), 這個事實早在十九世紀數學家 Sophus Lie 就已經知道 (可能還更早就有人知道), 也是學微分幾何的學生應該要知道的, 這證明了我當時微分幾何學得不徹底 ..., 我當時就在假設它是對的情況之下想了一個證明, 一個不完全的證明, 後來我才知道有所謂的 Lie bracket, 尤其是它不一定為零, 然後我也才知道任意兩個簡單連通開集合一般來說不會是複解析全等的而且是很不一樣。另外還有一個例子是關於將保角映射延拓成爲解析映射的定理, 我一直嘗試把它推廣到多元複變, 再一次的我看到一條很可能成功的路徑, 但還是有一些要素我無法完成, 牽涉到 Bergman kernel 函數上的一些估計, 當時我正好參加在波蘭的一個國際研討會在那裡我和一個知識比我豐富的人談到這事情他告訴我關於 Bergman kernel 函數我的想法是正確的。我告訴他, 我非常訝異, 因為我已經嘗試了好幾個月都沒辦法證明它, 他告訴我不要太在意因爲那是個很困難的定理必須用到和 $\bar{\partial}$ -Neumann problem 相關的方法, 那是我一次聽到 $\bar{\partial}$ -Neumann problem。就像這樣我剛開始做研究就是試驗與嘗試錯誤的方法, 事實上一般做研究也都是如此。當時如果有人指導, 我或許可以避免這些錯誤也不會經常覺得沮喪, 但自謀出路的歷練也幫助我成爲數學家。

李: 所以你從參加研討會中學習到很多。

L: 是的, 我確實在參加研討會中學到蠻多的。而且我發現如果要從研討會中學到有用的東西就必須要敢於問問題。記得我第一次參加國際研討會是在波蘭, 我就坐在第一排, 有聽不懂的我就問, 而我經常聽不懂, 所以過了一陣子大家都不耐煩了。但另一方面我也感覺到當我聽不懂的時候其實大部分的人也聽不懂, 甚至於有時講到一些新的想法連演講者也不太懂。那

次在波蘭的國際會議有一位演講者談到別人的工作而且講得不清楚,當時就有一位教授,我記得他是當時波蘭最偉大的分析及多元複變學家,問了一個很實際的問題結果竟然是那位演講者完全不曉得自己在說些什麼。參加那一次會議讓我發現不但聽眾不懂有時連演講的人都不懂,所以可以放心地問問題。

四. 對數學教育的看法

李: 你在美國及匈牙利都教過數學課程, 能否談談你對數學教育的想法?

L: 如果有人這樣問我, 我就會回答: 一些方法在美國被使用並不代表那就是最好的方法。當然美國的教育系統有它好的一面, 但我也看到美國教育系統有個大問題, 美國之所以在科學上有這麼好的成就當然有很多原因但有一大原因是移民來的各國科學家, 來自亞洲的、來自中國的、還有來自歐洲的。我個人覺得將美國科學的成功完全歸功於整個美國教育系統是不正確的。

李: 但是我們知道還是有很多美國土生土長的優秀數學家。

L: 當然, 當然, 千萬不要誤會。首先美國教育系統有些方面還是很好的, 再說天才和教育系統無關, 我剛才的說法並不是指美國人在科學上的成功完全靠外國人, 不, 不, 但是有部分是的, 而且那部分大家應該考慮到。現在匈牙利也是如此, 經常試著去複製美國的方式, 我想台灣可能有相同的情況。

李: 你的小孩接受的是美國教育, 數學教學方面你有不同意的時候嗎?

L: 是的, 而且是經常不同意。

李: 你會直接告訴你的小孩, 老師的方式是不正確的嗎?

L: 剛開始我嘗試去教他們一些我認為有趣的數學。他們小學的時候必須要學一些基本的計算如一年級學加減法, 二年級學乘法, 學會這些意思是他們必須要能夠在限制時間內, 如兩分鐘, 正確地算出一百個加法, 當然都是簡單的加法, 不能做到的話就不能進入下一個階段, 不能學減法。我不覺得這是那麼的重要, 加法的觀念當然是重要的, 但是做一百個加法只是在做苦功。所以我希望能夠修正這件事情, 希望告訴他們什麼是有趣的數學。最後也不曉得是什麼原因但是就在從學校學到的數學和我教的數學之間他們對數學失去了興趣。倒是曾經有過一段時間, 有一年我女兒對數學很有興趣, 我想有兩個原因, 一個原因是當時她正在學幾何學, 但是他們幾何學的教法和我以前學的很不一樣, 我又一次強烈抗議。抗議的是關於幾何證明的部份實在是太過於嚴密, 嚴密到簡直是死氣沉沉。他們的證明必須寫成所謂的兩行式證明 (two columns proof) 也就是你要將證明整理成兩行, 左邊寫上你想證明的數學語句右邊寫上你如何驗證這個數學語句, 有時光驗證兩個全等的東西就要寫得非常非常

詳細，把創造力都消滅了，這種作法把一些最愚蠢的簡單事情變成一些定理。所以那學期他們學了很多定理——有很多只是非常簡單的幾何事實，每個定理都有編號然後每一次證明中用到這些簡單的事實時就必須提到這個定理的編號。我覺得這種作法將幾何精彩刺激的部份都拿掉了。我女兒也非常排斥這種作法，但除此之外基本上她還蠻喜歡幾何學的。還有一個原因是那一年費瑪最後定理被證出來，應該說是初步證明那一次，當時她的老師提到這件事，所以她回家後就問我，既然你是數學教授應該可以告訴我如何證明費瑪最後定理。我就告訴她雖然我是數學教授但是我不知道這個證明，但是另一方面我可以告訴你關於小費瑪定理的證明，而這是與整數同餘有關的性質。她說好吧，而我也告訴她這可能要花一點時間因為我們必須先談一些預備知識。我們所談論的定理是這樣子的：假如 p 是質數而且不是另外一個自然數 a 的因數則 a 的 p 次方與 a 被 p 除所得餘數一定相同。

李：這對她當時會不會有點困難？

L：是有點難。因為那個時候她接觸過的數學證明都遠比這個證明簡單。我跟她談的是尤拉的證明，第一步你用二項式定理計算 $(1 + 1)^p$ ，除了頭尾兩個 1 其他每一項都是 p 的倍數所以 2^p 和 2 被 p 除同餘。然後再繼續考慮 $(2 + 1)^p$ 用同樣的方法及前面的結果證明它和 3 被 p 除同餘，然後再繼續下去。這就是我告訴她的證明，而過程中我用到巴斯卡三角形證明二項式定理也談到數學歸納法，我也告訴她巴斯卡提出這個三角形大概是在十六歲時而她當時十四歲，我們大多利用晚餐後半小時來討論，大部分的細節由她自己慢慢推導，這樣前前後後也花了幾個星期。

李：你認不認為學習的動機是數學教育中最重要的一環？

L：是很重要，但我也可以告訴你關於這方面的可笑例子。當我女兒到了十二年級，十八歲的年齡，她已經學了除了微積分之外幾乎所有基本的數學，有一個數學作業竟然要她們做海報談一些數學的想法，所以她就到網路上下載巴斯卡的圖像畫了巴斯卡三角，塗上顏色，最後她寫說這在費瑪定理證明中非常的重要。結果她得了個 A，其實全班每個人都得 A。我的意思是這種用做海報來引發學生對數學產生興趣的方法或許適合小學二三年級的學生但對十八歲的學生實在是非常不恰當。

李：剛剛談到從網路上下載資料，你認為經過網路我們是否可以學到更多的數學？

L：這個嗎！我想當你要找一些數學的事實時網路確實非常有幫助。但另外一方面我覺得網路上的資訊又實在太多了，真要學數學應該到圖書館、直接與人討論等等還有很多其他方式。我認為網路雖然有時非常方便但在數學上它並不是最根本的方式。說到這裡我想談談我的一些看法，在這個電腦資訊的時代裡，我們教微積分的方式卻非常的荒謬，以積分來說，我認為積分的技巧那麼的重要是有兩個原因，一個原因是它的實用性，它在實際應用上非常重要，第二個原因是它理論上的重要性，我們讓學生知道有一些方法、想法適用於全體或比較大的

範疇。從應用觀點我們可能不會去實際使用這些方法，雖然如此我們還是應該讓學生知道有些類型的問題是可以用一個想法來解決的，我認為這非常地重要。尤其現在積分技巧的實際應用性已經轉移到電腦，非常明顯的大部分函數積分用我們上課教的技巧是積不出來的，而這些積分卻可以用電腦軟體如 Maple、Mathematica、Matlab 等等算出令人滿意的答案，雖然我不會使用這些軟體但我知道它們比我厲害多了。所以現在比較有趣的就落在積分技巧理論上的重要性了。我們應該讓學生知道有一些方法甚至於有時一個想法可以應用在很多的情況，或者有些時候有一些方法可以把困難的問題簡化成比較容易處理的問題，這些都是數學運作的方式，所以不管是教積分或教其他主題我們都應該讓學生經由這樣的方式看到數學的精神。但是現在的微積分書卻不是如此，其實它們大多類似。舉個例，每一本微積分書都會有一個大章節談到三角函數變換積分，事實上有一個三角函數變換可以來處理所有三角函數積分但這個我們不教，我們只教如果三角函數是某一種特定形式（像說是奇數次或偶數次）就用某一種變換，如果它是另一種形式就要用另一種變換，如果它是第三種形式那又有第三種變換等等。我們忘了告訴學生事實上有百萬個函數不屬於我們教的任何一種形式，而其實只要用 $t = \arctan(x/2)$ 來做變數變換就可以將三角函數積分換成有理式積分，然後再用一些標準程序來積這些有理式，這就是我說的用一個想法來把複雜的問題轉化成比較簡單的問題。當然在實際應用上 $t = \arctan(x/2)$ 可能不是最簡捷的變換變數，有時看看三角函數是奇數次或偶數次可能可以更快得到答案，但這個變換變數的優點就是它在各種情況都可以用，我認為數學的正確方向就是我們希望能找到比較普遍的方法而不是一個情況一種方法。

李：今天真的很高興跟你談這麼多，謝謝你接受我們的訪問。