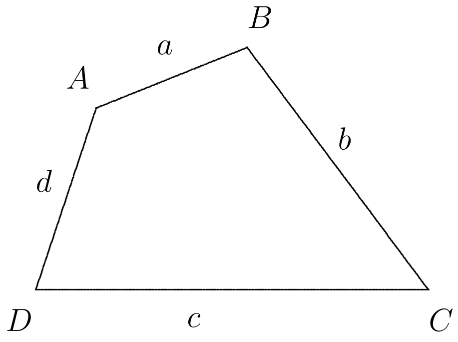
以微積分的方法求四邊形面積公式

張海潮

三角形被三個邊長完全確定, 四邊形則否。有名的海龍公式告訴我們如何利用三個邊長來計算三角形的面積。至於四邊形求面積的公式, 不能只用四個邊長, 還要加上頂角的角度, 公式由 Bretschneider 在 1842 年提出 (註一)。如果四個邊長依序爲 $a,\ b,\ c,\ d$, 而相關的頂角分別爲 $A,\ B,\ C,\ D$ (如圖一)



圖一

則此四邊形的面積 $\triangle$ 的平方可以表爲

$$\triangle^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\Big(\frac{B+D}{2}\Big).$$

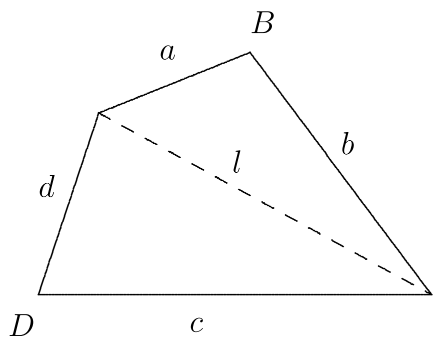
其中 s 是週長的一半。

如果以 $s=\frac{a+b+c+d}{2}$ 代入整理, 可以將 Bretschneider 公式寫成

$$\triangle^2=\frac{1}{16}(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)-abcd\cos^2\Big(\frac{B+D}{2}\Big)$$

一個重要的結果是, 當此四邊形內接於一個圓的時候, 由於 $B+D=180^\circ$, 因此面積會最大, 並且面積的平方就是 $\frac{1}{16}(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)$。

有關 Bretschneider 公式, 蔡聰明在他的書中用平面幾何的方法給了完整的證明 (註一)。本文嘗試用微積分的辦法來得出相同的公式, 想法來自微積分基本定理 — 我們想要求一個圖形的面積, 不妨把面積對某個參數微分, 看看能得出什麼, 然後再積分 (反微分) 回去, 積分回去的時候, 會生出一個不定常數, 再想辦法確定這個常數。在本文中, 四邊形的的四個邊長 a, b, c, d 給定, 它的面積以 $\triangle$ 表示, (如圖二) 參數就是角 B, 至於角 D, 它被 B 所決定, 因此可以看成是 B 的函數



圖二

我們先把 $\triangle$ 寫成

$$\triangle = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D$$

則有

$$\frac{d\triangle}{dB} = \frac{1}{2}ab\cos B + \frac{1}{2}cd\cos D\frac{dD}{dB}$$

因爲

$$l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$$

微分之後有

$$ab\sin B = cd\sin D\frac{dD}{dB} \tag{1}$$

現考慮

$$\triangle\frac{d\triangle}{dB} = \frac{1}{4}(ab\sin B + cd\sin D)(ab\cos B + cd\cos D\frac{dD}{dB})$$

將 (1) 代入得

$$\begin{aligned}\triangle\frac{d\triangle}{dB} &= \frac{1}{4}\Big(cd\sin D\frac{dD}{dB} + cd\sin D\Big)\Big(ab\cos B + cd\cos D\frac{dD}{dB}\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{dD}{dB} + 1\Big)cd\Big[ab\sin D\cos B + cd\sin D\cos D\frac{dD}{dB}\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{再將 (1) 代入}) &= \frac{1}{4}\Big(\frac{dD}{dB}+1\Big)cd[ab\sin D\cos B+ab\sin B\cos D]\\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{dD}{dB}+1\Big)abcd\sin(B+D)\\ &= \frac{-1}{4}abcd\frac{d}{dB}(\cos(B+D))\end{aligned}$$

所以

$$\frac{d}{dB}(\triangle^2) = -\frac{1}{2}abcd\frac{d}{dB}\cos(B+D)$$

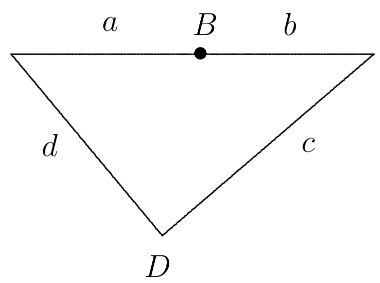
因此

$$\triangle^2 = K-\frac{1}{2}abcd\cos(B+D) \tag{2}$$

其中

$$K=K(a,b,c,d)\ \ \text{是一個待定的常數。}$$

如何決定 K? 當然要選一個特別的角 B 代入, 一般會想到讓 $B+D=180°$。此時 $\triangle$ 就是內接於一圓時四邊形的面積, 這未必好求。比較好的辦法是令 $B=180°$, 四邊形就變成了一個三角形。(如圖三)



圖三

這雖然是一個退化的情形, 但是一則不影響一般性, 再則三角形的面積有現成的海龍公式, 也就是說我們得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{16}(a+b+c+d)(a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d-a-b)\\ &=K-\frac{1}{2}abcd\cos(180°+D)\\ &=K+\frac{1}{2}abcd\cos D\end{aligned} \tag{3}$$

再用一次餘弦定律

$$\frac{1}{16}(a+b+c+d)(a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d-a-b) = K+\frac{1}{4}ab[c^2+d^2-(a+b)^2] \tag{4}$$

我們注意等式左邊就是三角形三邊長為 $a+b$, c, d 的面積平方 (海龍) 公式。(4) 式已經決定了 K, 雖然尚未整理, 卻至少告訴我們, K 是一個 a, b, c, d 的四次齊次多項式。現在, 可以利用配方來整理 K (這需要一點後見知明)

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)((c+d)^2-(a+b)^2)-\frac{1}{4}ab(c^2+d^2-(a+b)^2)\\
&= \frac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)((c+d)^2-(a+b)^2)\\
&\quad -\frac{1}{4}ab(c^2+d^2-(a+b)^2)+\frac{1}{2}abcd-\frac{1}{2}abcd\\
&= \frac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)((c+d)^2-(a+b^2))-\frac{1}{4}ab[c^2+d^2-2cd-(a+b)^2]-\frac{1}{2}abcd\\
&= \frac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)((c+d)^2-(a+b)^2)\\
&\quad +\frac{1}{4}ab(a+b+c-d)(a+b+d-c)-\frac{1}{2}abcd\\
&= \frac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)((c+d)^2-(a+b)^2+4ab)-\frac{1}{2}abcd\\
&= \frac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d-a+b)(c+d+a-b)-\frac{1}{2}abcd
\end{aligned}$$

代回到 (2)

$$\begin{aligned}
\triangle^2 &= \frac{1}{16}(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)\\
&\quad -\frac{1}{2}abcd-\frac{1}{2}abcd\cos(B+D)\\
&= \frac{1}{16}(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)\\
&\quad -abcd\cos^2\Big(\frac{B+D}{2}\Big)\\
&= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\Big(\frac{B+D}{2}\Big)
\end{aligned}$$

這是 Bretschneider 公式。

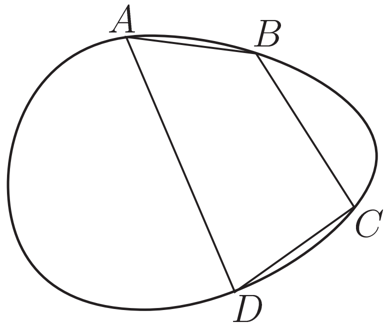
我第一次看到將 $\triangle$ 對角 B 微分, 是在項武義老師的演講中, 他的講題是等周問題 (Isoperimetric Problem), 他寫下了

$$\triangle\frac{d\triangle}{dB}=\frac{1}{4}\Big(\frac{dD}{dB}+1\Big)abcd\sin(B+D)$$

然後, 他令 $\frac{d\triangle}{dB}=0$, 得出 $\sin(B+D)=0$ 或者 $B+D=180^\circ$ 時, $\triangle$ 會有最大值。他利用這個事實嘗試給等周問題一個比較幾何的證明 (當然, 他假設了等周問題是有解的) (註二)

他的證明如下:

不妨假設這個面積最大的情形是發生在一個凸的區域 (周長給定) (如圖四)



圖四

任取四點, 連一個四邊形, 如果 $ABCD$ 不能內接於一圓, 那麼就可以調整角 B, 讓 $ABCD$ 的面積更大, 而注意到作這個調整的時候弧長 AB, BC, CD 及 DA 卻沒有改變。

因此, 如果這個凸區域在給定的周長之下具有最大面積的話, 那在邊上任取四點所成的四邊形都必須內接於一圓 , 不難證出, 這些圓根本就是同一個圓, 這個凸區域就是此圓的內部。等周問題主張在周長一定的時候, 圓域的面積最大。武義師的證明相當有啓發性。(註三)

註一. 見蔡聰明, 數學的發現趣談, 三民書局, 九十一年版, 第 163 頁。

註二. 等周問題是問, 當周長一定的時候, 什麼樣的區域會有最大的面積, 答案是圓域, 有興趣的讀者可以參考 Courant and John, Introduction to Calculus and Analysis, Vol. II, pp.365-366.

註三. 八十八年項武義老師在台大數學系的演講。

—本文作者曾任教於臺灣大學數學系, 現已退休—