

論數學解題教學的現代理論基礎

喻 平

教學理論的演變受制於社會的發展，本文不去辨析對教學理論產生影響的複雜因素，只從數學觀的變革和現代學習心理學的發展去梳理解題教學觀的演化，並對數學解題學習的本質作出剖析，從而搭建現代意義下的數學解題教學理論。

1. 數學觀演變的啟示

傳統上，數學知識一直被人們視為真理。自 Euclid 在 2500 年前建立了以「幾何原本」為典範的數學邏輯結構體系以來，直到 19 世紀末此結構都作為真理和可靠性建立的範式。Newton 和 Spinoza 等人在自己的著作中也採用過「原本」的形式，以加強他們對真理系統闡述的力度。由此長期的積澱，形成了絕對主義數學觀，即認為數學由確定無誤的真理構成，代表著可靠知識的絕對真理。這種觀念持續到 20 世紀初，然而，在這一期間許多悖論的出現，使得無法用數學基礎作出解釋，從而對絕對主義觀產生了強大衝擊，特別是集合論和函數論中出現的矛盾，對絕對主義產生了致命的威脅。為了維繫絕對主義的數學哲學，歷史上相繼產生了邏輯主義、形式主義和構造主義三個數學哲學流派。邏輯主義企圖把數學的可靠性轉化為邏輯的可靠性，利用邏輯的可靠性去確立數學的可靠性，但是遇到的麻煩是：數學必須要用到非邏輯公理（如無窮公理和選擇公理），也就是說，不是所有數學定理都能單純地從邏輯公理導出，因而，邏輯不能為數學知識提供可靠基礎。形式主義旨在把數學轉化為不予解釋的形式系統，通過導出所有數學真理的形式的對應物，並通過相容性證明去解釋該形式系統對數學是可靠的。但是，Gödel (1931) 的不完全性理論證明了這是一個無法實現的綱領。構造主義認為，數學真理的存在性必須由構造方法去確定，數學知識必須通過基於構造主義邏輯的構造型證明加以建立。構造主義同樣不能為數學真理的絕對性提供依據，因為它不僅無法解釋非構造型經典數學的實質，而且否認它的有效性。事實上，構造主義既沒有證實經典數學所面臨的無法迴避的問題，也沒有說明經典數學的非協調性和非真實性。

數學哲學的三大思想流派未能證實數學知識的可靠性，使得人們從問題的反面去思索，逐步形成“可誤主義”觀。包括 Lakatos、Russell、Fraenkel、Weyl、Gödel 等一大批數學家

數學哲學家形成共識，認為數學知識是不絕對真理，它沒有絕對有效性，數學真理是可誤的且可糾正的。後來，Lakatos (1976) 建立了擬經驗主義，使可誤主義得到進一步發展。擬經驗主義的主要觀點：(1) 數學知識是可誤的；(2) 數學是假設——演繹的。即公理化不能真正表示非形式理論；(3) 歷史是核心。數學哲學認識論的任務在於解釋已存在的數學理論；(4) 非形式數學的首要性，因為形式數學是形式化後的東西，所以非形式數學是一切形式數學的根源；(5) 數學知識是在證明與反駁的辯證迴圈中創造的。

以約定主義和擬定主義為基礎，Ernest (1991) 提出了社會建構主義的數學哲學。社會建構主義將數學視作社會的建構，它吸取約定主義的思想，承認人類知識、規則和約定對數學真理的確定和判定有著關鍵作用。同時，它又吸取擬經驗主義的觀點，認為數學知識是不斷發展的變化的，是可誤的，數學理論在證明與反駁中得到發展。社會建構主義的核心是數學知識的生成，Ernest (1991) 提出了知識產生的基本假說：(1) 個體學到的是通過個人建構的主觀知識；(2) 發表成果是主觀數學知識變成客觀知識所必要的；(3) 發表的數學知識經歷 Lakatos 所說的啓發式過程成為客觀知識。Lakatos 所說的啓發式過程是指，發表的數學知識須經他人的審視和評判，才有可能重新形成並成為人們接受的客觀數學知識；(4) 啓發式過程取決於客觀標準；(5) 評判發表的數學知識，其客觀標準是建立在客觀的語言知識及數學知識的基礎上；(6) 數學主觀知識本質上是內化了的、再建構了的客觀知識；(7) 在數學知識的增添、再建或再現方面，個人能夠發揮作用。

絕對主義數學觀向可誤主義數學觀的演變，本質上反應出由靜態數學觀向動態數學觀的發展。絕對主義注重終結性數學知識的判定，“不僅把知識看作一種客觀成果的知識，而且常常根本否定涉及知識的哲學合理性”(Ernest, 1991)，因而，絕對主義是一種靜態的數學觀。相比之下，由於認識到數學真理不是絕對的，可誤主義強調理論的取代和知識的發展，關注人類創造知識的環境和數學的歷史根源。這兩種不同的數學觀在教育中折射出兩種不同的教學觀。靜態數學觀視“結果”為重，因而把數學教學理解為知識結果的教學，形成一種“結果式”的教學範型。動態教學觀則以“過程”為重，更強調知識的發生和發展過程，數學教學就應該揭示知識的生長、暴露思維內核，在數學活動中去習得知識。因而，與動態數學觀對應是一種“過程式”教學範型。

社會建構主義解釋了個人與社會相互作用促進主觀知識與客觀世界相適應的機理，為個人主觀知識的建構提供了認識論基礎。這一理論彙通在教育範疇，則體現為主體學習的內涵。一方面，“主觀知識不是被動接受的”，而是由認識主體主動建立的，認知的功能是適應並用於個人經驗世界的組構”(Glaserfeld, 1989)。另一方面，“物質和社會的客觀制約對主觀知識具有塑造作用，這種作用使得主觀知識與客觀知識（包括社會和物質世界的以及他人的知識）之間相一致”(Ernest, 1991)。因而，教學中學生是主觀知識建構的主體，他們以客觀知識為參照，借

助於個人先前的經驗去建構新的知識體系，而個人構築的主觀知識是否與客觀知識相一致，需要由社會評判。在教學中教師是主要評判員，教師依據自己的主觀知識去評判學生自我建構的主觀知識，因為教師的主觀知識與客觀知識有高度的一致性，是客觀知識的複本。從這個意義上說，教師是教學中的另一個主體，而其行為又表現出一種“主導”作用。

數學觀的演變給數學教學進而給數學解題教學兩點啓示：(1) 應當把數學教學理解為數學思維活動的教學，其範型為“過程+結果”。(2) 數學學習是學生主動建構知識的過程，教師的主導作用是設計利於學生主動建構知識的環境，促進學生習得的主觀知識與客觀知識在有效時間內趨於一致。

2. 心理學理論發展的啓示

20 世紀上半葉，Thorndike 創立了聯結主義的學習理論，把學習解釋為刺激與反應之間的聯結。之後，該理論逐步發展為行為主義，但行為主義的研究視野並沒有超越聯結論的範式，其基本觀點是：認為學習的實質在於現成刺激與反應之間的聯結，這種聯結是直接的、無中介的，是靠嘗試錯誤而建立的。行為主義強調對學習的客觀研究，相對忽視學習的內部過程。

針對行為主義忽視對學習的內在心理過程研究的缺陷，20 世紀下半葉產生了認知學習理論。格式塔心理學率先崛起，隨後由 Tolman、Piaget、Gagne、Bruner、Ausubel、Anderson 等將認知學習理論的研究推向深入。下面擷起兩種在當今教學心理領域影響較大的理論做一分析，從而得到對建立數學解題教學理論基礎的啓示。

2.1. 知識分類與表徵理論

Anderson 在近 20 餘年中致力於對人的智慧理論研究，他的研究中心在於探討知識的各種表徵性質以及它們的功能，因而他是闡明這一領域中的一些重大理論問題的開拓者。概括起來，知識分類與表徵理論的研究主要有以下結果。

①知識的分類。Anderson 認為知識可以分為兩類，一類是陳述性知識 (declarative knowledge)，另一類知識程序性知識 (procedural knowledge)。根據「認知心理學詞典」(edited by M. W. Eysenck, 1990) 的定義：“陳述性知識是個人具有有意識的提取線索，因而能直接陳述的知識。程序性知識是個人無有意義的提取線索，因而其存在的只能借助於某種作業形式間接推測的知識。” Mayer 於 1987 年在綜合 Gagne 和 Anderson 知識分類的基礎上，提出了一個廣義的知識觀。他將知識分為三類：(i) 語義知識，指個人關於世界的知識；(ii) 程序性知識，指用於具體情境的演算法或一套步驟；(iii) 策略性知識，指如何學習、記憶或解決問題的一般方法，包括應用策略進行自我監控。

② 陳述性知識的表徵。陳述性知識的基本表徵形式有三種，即命題、表像和線性排序。命題是陳述性知識的最小單元，相單於個體頭腦中的一個觀念。表像指在知覺基礎上對事務的形象表徵。線性排序指對事物之間線性次序的編碼？陳述性知識塊的表徵是圖式。Anderson 認為：“圖式是對範疇的規律性作出編碼的一種形式。這些規律性既可以是知覺性的，也可以是命題性的。”

③ 程序性知識的表徵。程序性知識的表徵是“產生式”(production)。產生是實際上是一條“條件—行動”規則，及一個產生式總是對某一或某些特定的條件滿足時才發生的某種行為編擬的程式。

④ 陳述性知識的獲得與精緻。精緻是指與當前所學的信息建立起更多聯繫的一增加或擴充的心理過程種。Anderson、Gange、Bobrow、Bransford (1979)、Hyde (1973) 等的研究表明：建立命題網路是理解知識的基礎，陳述性知識的提取依賴於命題的激活，精緻能夠產生對各種材料的更好的記憶，精緻能對人記憶的搜尋表現出結構化，從而更有效地提取到信息。

⑤ 程序性知識的獲得。在特殊領域內，程序性知識分為自動化技能和策略性知識等兩類。Anderson 認為自動化基本技能的獲得分為三階段：認知階段、聯繫階段、自動化階段。在認知階段，學生將使用自己已有的為達到一定目的的一般產生式或稱弱的方法，對某一技能作出陳述性解釋，並對這一技能的各項條件及行動形成最初具陳述性表徵的編碼。在聯繫階段，原先指導行為的知識將發生兩種轉變：第一，陳述性表徵將慢慢轉變為特殊領域裏的程序性知識；第二，構成這一程式的各個部份的產生式間的聯結將得以增強。在自動化階段，整個程序本身得到進一步的精緻和協調，使技能逐步達到自動化。對於策略性知識，則不是一個從有意識過渡到自動化的階段。策略性知識的獲取受原有知識背景、反省認知發展水平、動機水平的影響。

上述關於認知心理的研究，給教學賦予了新意。其一，將知識分為陳述性知識、程序性知識(包括智慧技能和認知策略)，這樣就對知識做了廣義地理解，這種廣義的知識觀將知識、技能與策略融為一體，從這樣意義上說，掌握了廣義的知識就是發展了能力，因而，研究如何發展智力的問題就變成研究如何有效地掌握不同類型知識的問題。其二，對陳述性知識和程序性知識的表徵研究，本質上是對認知結構的一種細緻刻畫，使其認知結構的概念內涵更加清晰，更利於完善認知結構的教學操作。其三，知識的分類為教學設計中的教學目標的定位起了導向作用，不同類型的知識學習有不同的教學目標，因而也就有不同的教學策略，這樣，廣義的知識觀就有利於科學地進行教學設計。

2.2. 建構主義理論

哲學領域的建構主義研究與心理學領域的建構主義研究相互滲透、並行發展。迄今，已產生了派系繁多的建構主義流派，陳琦等(1998)將其歸納為6類：極端建構主義、社會建構主

義、社會文化認知觀、資訊加工建構主義、社會建構論、控制系統。這些不同傾向的建構主義在“知識建構”觀上是一致的，分歧僅在於“外部輸入—內部生成”和“個體—社會”兩個方面。在“外部輸入—內部生成”連續的維度上，不同的建構主義表現出知識是外部輸入還是內部生成的傾向性程度的差異。外部輸入的傾向性越大，學習過程中接受的成分越多；內部生成的傾向性越大，學習過程中建構的成分越多。在“個體建構—社會建構”的維度上，不同建構主義反應出在“個體”和“社會”兩個方面傾向性程度的差異，主要指“個體的建構”、“個體間的建構”、“社會性建構”之間的差異。

概括地說，建構主義對學習的闡釋在如下幾方面：① 對知識的理解方面。建構主義認為，學習者根據自己的經驗背景，以自己的方式建構對知識的理解，不同的人看到的是事物的不同方面，因此對於世界的理解和賦予意義由每個人自己決定，而不存在唯一標準的理解。因而，知識不能灌輸、強加，要靠學生以自己的經驗、信念對新知識分析、檢驗和批評。② 對學習活動的理解方面。建構主義的基本觀念是，學習活動不應是由教師向學生傳遞知識，而是學生建構自己的知識過程。學習者不是被動地吸收信息，而是主動地建構信息的意義，同時把社會性的互動作用看作是促進學習的源泉。③ 對學習者的認識方面。建構主義認為，學習者在生活以及以往的學習中已形成了豐富的經驗，在新的學習中，他們往往基於相關的經驗去推出合乎邏輯的假設，從原有的知識經驗中生長出新的知識經驗。

顯然，心理學中的建構主義是從認知角度對哲學中社會建構主義的具體解釋，兩者在“社會建構”的意義下一脈相承。因而，以社會建構主義作為教學論的一種基礎是合理的。

3. 數學解題學習的本質

3.1. 解決問題是一種學習的過程

Gagne (1965) 指出：“問題解決並不是簡單地就先前習得的規則的運用，它也是一個產生新的學習的過程。學習者被置於（或發現自己處於）一個問題情境中，他們回憶先前已掌握的規則以試圖找出一個答案。在進行這樣一個思維過程中，學習者會嘗試許多假設並檢驗它們的可應用性。當他們找到一個適合這種情境的規則的特定聯合的時候，他們不僅僅解決了這個問題，而且也學會了某些新的東西。一個新學會的東西實質上就是一個‘高級規則’，它使個體能夠解決相似類型的其他問題。新學習的另一個方面可能是解決問題的一般方法，換言之，是能夠引導學習者的後續思維行為的認知策略。”

Gagne 的這段話不僅闡釋了問題解決是一個學習過程，而且指出通過問題解決學到了哪些具體知識。具體地說，基於問題解決的數學學習主要表現在兩個方面。

(1) 鞏固和理解已學過的知識。這是前期學習的後續。學習者先通過聽課、閱讀等過程獲得一定知識，而後通過問題解決促進知識的鞏固，加深對知識的理解，使之能夠靈活應用知識，這是學習的全過程。

問題解決作為對基本概念、規則、技能和方法的應用可以鞏固相應的知識，提高相應技能的熟練化程度。當面臨常規或較熟悉的問題時，學習者可直接利用已有的概念、規則或方法去解決問題，這種情形可以使學習者更加熟悉知識的內涵和功能，促進問題解決的技能更完善。當面對的問題與原有知識經驗有一定差距時，學習者將已有的概念、規則進行組合和搭配，或把已習得的方法進行改良，以尋求解決當前問題的思路。這一過程可以幫助學習者深化對知識的理解，建立知識經驗之間更豐富的聯繫。Skemp (1976) 認為數學理解有兩種模式：工具性理解和關係性理解。工具性理解是指語義性理解（如符號 A 所指代的事物是什麼）和程序性理解（如規則 R 所指定的步驟和操作程序是什麼）。關係性理解指在工具性理解的基礎上，還需要對符號的意義和替代物本身結構的認識、對規則本身的有效性的邏輯依據認識。顯然，工具性理解和關係性理解是理解知識的兩種層次，這兩種理解都只能在問題解決中實現。解答簡單的、常規的問題可達到對知識的工具性理解；解答複雜的、非常規的問題，則可逐步達到對知識的關係性理解。

(2) 習得新的知識、問題解決活動可以促使學習者建立新圖式，形成新概念，發現新原理，獲得解決後繼問題的認知策略。對數學學科而言，這種情形更為突出。數學學習的內容，有很大一部份是由習題組成，這些習題除了具有鞏固知識、應用知識、訓練技能、發展思維等功能之外，習題本身也是數學知識。事實上，有的習題本來就是一條定理或法則，有的習題其解答方法具有一般性，可用於解決相關的一類問題。顯然，這些“高級規則”和“認知策略”只能在問題解決中獲得和發展。

3.2. 解題學習是個體建構知識的過程

建構主義學習觀認為，學習活動不應是由教師向學生傳遞知識，而是學生建構自己的知識的過程，學習者不是被動地吸收信息，而是主動地建構信息的意義，同時把社會性的互動作用看作促進學習的源泉。Spiro 等 (1991) 認為建構包含兩方面的含義：(1) 對新信息的理解是通過運用已有經驗，超越所提供的新信息而建構成的。(2) 從記憶系統中提取的信息本身也要按具體情況進行建構，而不僅僅是提取。建構一方面是對新信息意義的建構，另一方面又包含對原有經驗的改造和重組。

Shall (1988) 和 P. Roben-Jan Simons (1993) 提出了建構主義學習的特徵：(1) 積極的學習。(2) 建構性的學習。(3) 累積性學習。學習是累積性的，不是簡單疊加或量變，而是對原的知識的深化、突破、超越或質變。(4) 目標指引性學習。建構主義的學習目標是定向的，但不

是從外部由他人設定的，而是形成於學習過程的內部，由學習者自己設定。(5) 診斷性學習。以自我診斷來調節學習進程。(6) 反思性學習。對學習活動進行階段反思和整體反思，修正學習策略。

下面分析基於問題解決的學習過程

首先，解題學習更多的情形是一種個人行為，正是這種個人行為，使學習成爲一種主動地自我建構過程。正如 Gagne (1965) 指出的：“作爲問題解決的學習方法要求學習者無須具體幫助而發現高級規則。他們也因此以自己獨特的方式建構新的規則。”在解題過程中，解題者要依據自己的認知結構，獨立地表徵問題、選擇解題策略，同時又要調控自己的思維，建構新的圖式，形成相應的問題解決技能，表現出自我獲取知識的獨立建構行為。

第二，解題學習體現了建構主義學習觀的基本要義。(1) 解題學習是一個積極主動的建構過程，學習者不是被動地接受外在信息，而是主動地根據先前認知結構，注意和有選擇地知覺外在信息，建構當前問題的意義。(2) 這種建構是雙向的，一方面，通過原有認知結構去同化外部信息；另一方面，又通過外部信息去順應和改組原有認知結構。(3) 學習者的建構是多元化的，對同一個問題，不同知識背景、不同思維水平解題者對問題有不同的理解和表徵；對同一個問題，具有不同的認知結構的解題者會有不同問題表徵方式和不同的遷移效果；具有不同自我監控水平的解題者會對同一問題的解決產生不同效果。

第三，解題學習符合建構主義學習特徵。如上所述，解題學習是一種主動地建構性學習。不僅如此，解題學習又是累積性學習，一方面它是對知識的鞏固和深化，另一方面又能獲取新的規則和技能，形成新的認知結構。再有，解題學習是目標指引性學習，問題的題設和結論給出了外部目標，不同的解題者會將這個外部目標轉化爲不完全相同的內部目標從而去達到這個目標，也就是說，對問題的不同理解導致對問題的不同解法。對於答案不確定或不唯一的開放問題，則主要是內部目標起導向作用。最後，解題中的自我監控行為反應出解題學習是診斷性和反思性學習。

綜上所述，解題學習是一種知識的建構過程。這種知識建構在數學解題活動中表現出幾個特徵：(1) 解答數學問題是一種高水準思維活動，而高水準思維的學習有助於知識的建構(張建偉，2000)。(2) 個體優良的認知結構只能通過解題活動去逐步形成，即認知結構的建構在解題活動中才能實現。(3) 解題自我監控能力伴隨著解題活動而逐步形成和發展。

3.3. 解題學習的本質是社會建構

以 Vygotsky 的理論爲基礎的社會建構主義哲學，認爲世界是客觀存在的，對每個認識世界的個體來說是共通的。知識是在人類社會範圍內建構起來的，在不斷地被改造，以儘可能與世界的本來面目相一致。因而，社會建構主義把學習解釋爲不僅是個體建構自己的知識和理解的

過程，而且社會對個體的知識建構起著重要的支撐和促進作用。社會建構主義強調人的高級心裡發展是自然性和社會性相互作用內化的結果。

Ernest (1991) 將數學知識視為一種社會建構，其根據是：(1) 數學知識的基礎是語言知識、約定和規則，而語言是一種社會建構；(2) 個人主觀數學知識發表後轉化成使人接受的客觀數學知識，這需社會性的交往與交流；(3) 客觀性本身應該理解為社會性的認同。

解決問題的過程，是一種主觀行為，解題者需要利用內化的主觀知識，遵循邏輯約定，進行推理、演算等主觀的活動，在此過程中所創造的成果（如完成一道題目的解答或獲得一種新的解題經驗等）要得到社會的承認，又是一個將主觀知識轉化為客觀知識的過程。譬如，一個問題是否解答正確，是否形成一種客觀知識，需要得到社會共同體的評價（具體地說，如由教師評價），而社會共同體的評判標準，是在長期實踐中形成並建立在客觀語言知識及數學基礎之上的準則。也就是說，個體在解題活動中建構的主觀知識，必須經社會檢驗後成為客觀知識，在這個意義上說，個體形成的知識就是一種社會建構的結果。由此可見，個人建構的數學知識被看作是“個人意義”和“文化意義”的一種融合。

4. 數學解題教學的理論基礎

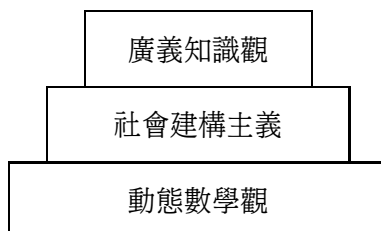
解答數學問題，其全過程為：發現問題→解決問題→應用問題。構成解題的外部要素：問題、理論、方法、語言和觀念，這些靜態要素在解題過程表現出一種動態行為，形成解題認知的內部迴圈過程。從由觀察、試驗、類比、歸納、猜想、直覺等合情推理，到分析、綜合、推理、論證的邏輯演繹；從對現象的抽象、概括，建立數學模型，到解答這個模型，是一個充分揭示數學知識發生與發展、暴露數學思維的動態過程，學生的知識增長伴隨這種動態過程不斷發展，認知結構不斷完善。因而，解題教學應當以動態數學觀作為指導思想，要讓學生體驗發展的、動態的數學。

前面的分析指出瞭解題學習是知識建構過程，其本質是一種社會建構，與此對應，解題教學就應當把社會建構主義作為一種理論基礎。

廣義知識分類觀對知識的恰當分類以及對各類知識表徵的描述，實質上是對個體主觀知識建構過程的心理刻畫，這一理論發展了 Piaget “同化—順應”的知識建構學說，使其理論更加貼進教育和教學，因而，廣義知識觀應是解題教學的另一層理論基礎。

綜上所述，我們認為數學解題教學的理論基礎有三個層面：第一層是由可誤主義數學觀演變的動態數學觀構成；第二層是動態數學觀發展而來的社會建構主義（包括心理學領域的相應建構主義觀）構成；第三層是由聯結建構主義與教學設計的中介理論—廣義知識觀所構成。這

個理論基礎構架如圖所示。



參考文獻

1. P. Ernest 著, 齊建華, 張松枝譯, 數學教育哲學, 上海: 上海教育出版社, 1998年。
2. R. M. Gagne 著, 皮連生等譯, 學習的條件和教學論, 上海: 華東師範大學出版社, 1999年。
3. 吳慶麟, 教育心理學, 北京: 人民教育出版社, 1999年。
4. R. Skemp 著, 林義雄等譯, 數學學習心理學, 臺北: 九章出版社, 1992年。
5. 陳琦、張建偉, 建構主義學習觀要義評價, 華東師範大學學報 (教育版), 1998年 (1), 61-68。
6. 張建偉, 基於問題解決的知識建構, 教育研究, 2000年 (10), 58-62。
7. 高文, 建構主義學習的特徵, 外國教育資料, 1999年 (1), 35-39。
8. V. Glaserfeld, *Learning as a Constructive Activity*, Proceedings of the Fifty Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1989, Vol.1, Montreal, pp.41-69.
9. R. J. Spiro et al., *Cognitive Flexibility, Constructivism, and Hypertext: Random Access Instruction for Advanced Knowledge Acquisition for Ill-structured Domains*, In T. M. Duffy and D. H. Jonassen (Eds). *Constructivism and the Technology of Instruction: A Conversation*, 1991, pp.57-75.

—本文作者任教於南京師範大學數學與計算機科學學院—