

拼圖遊戲

葉洹君

一、前言

暑假的時候，爸爸送我一一個禮物——車子拼圖，這個拼圖共有九張圖片（見圖一），每張圖片的東邊、南邊、西邊、北邊各有四種不同顏色（綠色、紫色、紅色、黃色）的半輛車子，正確的拼圖目標和規則是把這九張圖片排成一個 3×3 的正方形，使得任何相鄰（有公用邊）的兩張圖片中的兩個半輛車子都能吻合成爲一輛完整的車子。



圖一

剛拿到這個9張車子拼圖圖片的時候，我就開始盲目地嘗試，過程中碰到很多的失敗，而且發現到我一直重複一些相同的錯誤。有時候，我突然拼出正確的 3×3 大拼圖，但是一弄亂之後，我再也不知道如何拼回去。這是一個相當有趣的問題，必須要細心、耐心地分析、觀察規律和分類探討，其中蘊藏了許多數學秘密，所以我利用暑假期間好好地把它這個問題研究一番，探討其中蘊藏的數學秘密。我希望能找出所有九張圖片的 3×3 正方形正確拼圖，而且藉著這個問題的研究，我學到“化繁爲簡”的技巧，同時也學到正推、反推的思維想法，和用樹狀圖形來作解題的方法，進而應用這種技巧來找尋其他遊戲必贏的策略（例如：玩捉強盜遊戲）。

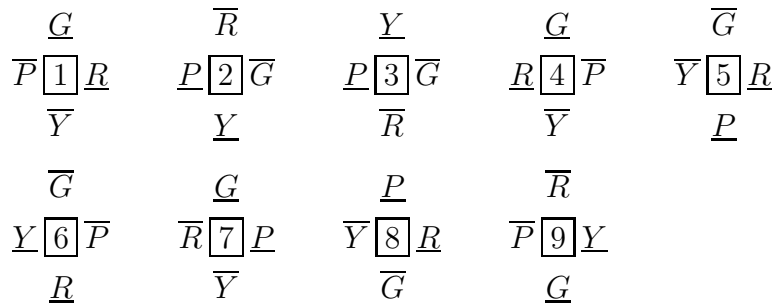
二、研究過程

這個拼圖問題乍看之下，我的感覺是“想找出所有正確拼圖的過程一定是相當複雜”。如果隨便亂放，則每張圖片都可以向右轉動90度四次，共有四種朝向，所以每張圖片有4種可能的放

法; 3×3 正方形的9個位置中放9張圖片有 $9!$ 種可能的放法。即使扣掉對稱的圖形也超過幾十億種可能的放法。所以不可能去檢查每一種情況, 因此, 首先要細心、耐心地找出所有可能的情形, 不能有任何的遺漏。而且要了解9張拼圖圖片的結構及特性, 並仔細地觀察和分類。再分析出更多的規律, 排除許多不可能成為 3×3 正確拼圖圖片的情形, 及避免重複一些相同的錯誤, 這樣可以使得求解過程愈趨簡單, 最後找出所有可能的解答, 這些過程中並不一定要用什麼高深的數學技巧。但是必須要細心、耐心地找出所有可能的情形, 不能有任何的遺漏。另外也設法定義一些符號來表達並記錄操作的過程, 否則不容易作出有系統地分析, 也不容易表述清楚。

(一) 符號:

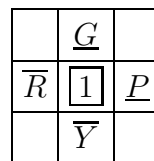
我把這車子拼圖的9張圖片照圖一的順序由上而下再由左而右地編號為 1, 2, ..., 9, 依照車子顏色記為 G (綠色)、 P (紫色)、 R (紅色)、 Y (黃色)。另外每種顏色車子都分為兩半, 我們把 X 車的兩半記為 \overline{X} (車頭) 和 \underline{X} (車尾), 所以圖一中的9張圖片可以記為



圖二

如果把這9張車子拼圖的圖片排成 3×3 的正方形, 也可以說把這9張車子拼圖的圖片放在 3×3 的九宮格中的格子裡, 我們把 3×3 的正方形 (或稱為 3×3 的九宮格) 中9個位置的編號如圖三。

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)



圖三

圖四

如果把這9張車子拼圖的圖片排成 3×3 的正方形, 只要我們轉動這大張的 3×3 正方形 (包含九張圖片), 一定可以使得第一張圖片的朝向呈現如圖四。所以在本文章之後, 任何提到第一張圖片的時候, 都是指它的四個半輛車子的位置都呈現圖四的朝向, 即在東邊是 \underline{R} 、南邊是 \underline{Y} 、西邊是 \overline{P} 、北邊是 \overline{G} 。

(二) 認識遊戲道具及規則

這9張車子拼圖的圖片中,

- | | |
|---|--|
| 有 \overline{G} 的圖片編號是: 2, 3, 5, 6, 8; | 有 \underline{G} 的圖片編號是: 1, 4, 7, 9; |
| 有 \overline{R} 的圖片編號是: 2, 3, 7, 9; | 有 \underline{R} 的圖片編號是: 1, 4, 5, 6, 8 |
| 有 \overline{P} 的圖片編號是: 1, 4, 6, 9; | 有 \underline{P} 的圖片編號是: 2, 3, 5, 7, 8; |
| 有 \overline{Y} 的圖片編號是: 1, 4, 5, 7, 9; | 有 \underline{Y} 的圖片編號是: 2, 3, 6, 9。 |

任何相鄰 (有公用邊) 的兩張圖片中的兩個半輛車子都滿足連接規定: “能吻合成爲一輛完整的車子”。也就是說, 如果某張圖片的東邊 (或南邊、西邊、北邊) 車子是 \overline{X} (或 \underline{X}), 則這張圖片的右邊 (或下面、左邊、上面) 的圖片的西邊 (或北邊、東邊、或南邊) 一定是 \underline{X} (或 \overline{X})。

(三) 初步的想法: 在這一段落裡, 我們將提出一個可以找出所有 3×3 正確九張拼圖圖片的方法。

反推的思維:

1. 假設我們拼好一張正確的 3×3 大拼圖, 則我們一定可以從這張大拼圖中剪下一個包含第一張圖片的 3×2 正確六張圖片組。
2. 同樣地, 假設我們拼好一張包含第一張圖片的 3×2 正確六張圖片組, 則我們一定可以從這張 3×2 的六張圖片組中剪下一個包含第一張圖片的 2×2 正確四張圖片組。
3. 假設我們拼好一張包含第一張圖片的 2×2 正確四張圖片組, 則我們一定可以從這張 2×2 四張圖片組中剪下一個包含第一張圖片的 1×2 正確二張圖片組。

正推的思維:

1. 如果找出所有包含第一張圖片的 1×2 正確二張圖片組, 再從每個 1×2 正確二張圖片組的上面 (或下面) 一行加入剩下的七張圖片中的兩張, 檢查看看這 2×2 四張圖片組是

否為 2×2 正確四張圖片組 (即滿足連接規定: 任何相鄰的兩個半輛車子都能吻合成為一輛完整的車子)。這樣我們就可以找出所有的 2×2 正確四張圖片組。

2. 如果找出所有包含第一張圖片的 2×2 正確四張圖片組, 再從每個 2×2 正確四張圖片組的左邊、右邊、上面、或下面一行加入剩下的五張圖片中的兩張, 檢查看看這 3×2 或 2×3 的六張圖片中是否滿足連接規定。這樣我們就可以找出所有的 3×2 或 2×3 正確六張圖片組。
3. 如果找出所有包含第一張圖片的 3×2 (或 2×3) 圖片組, 再從每個 3×2 圖片組的左邊或右邊 (或上面、下面) 一行加入剩下的三張圖片, 檢查看看這 3×3 的九張圖片是否滿足連接規定。這樣我們就可以找出所有九張圖片的 3×3 正確拼圖。

(四) 改良的想法: 在前一段的討論裡我們雖然找到了正確的拼圖方法, 但是為了提出一個更快速找出所有 3×3 正確九張拼圖圖片的方法, 我們有更深入且完整的另一種想法:

反推的思維:

1. 為了找出所有九張圖片的 3×3 正方形正確拼圖, 我們只要找出所有包含第一張圖片在 $(1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2)$ 的 3×2 圖片組及找出所有包含第一張圖片 $(1, 3)$ 的 2×3 正確六張圖片組, 因為第一張圖片在這 3×3 的九宮格中可能的位置, 有九種可能: (i, j) 其中 $1 \leq i, j \leq 3$:
 - (1) 如果第一張圖片在正確的 3×3 大拼圖中的 $(1, 1)$ 或 $(1, 2)$ 位置, 則我們可以從這張大拼圖中剪下一個包含第一張圖片在 $(1, 1)$ 位置的 3×2 正確六張圖組。
 - (2) 如果第一張圖片在正確的 3×3 大拼圖中的 $(2, 1)$ 或 $(2, 2)$ 位置, 則我們可以從這張大拼圖中剪下一個包含第一張圖片在 $(2, 1)$ 位置的 3×2 正確六張圖組。
 - (3) 如果第一張圖片在正確的 3×3 大拼圖中的 $(3, 1)$ 或 $(3, 2)$ 位置, 則我們可以從這張大拼圖中剪下一個包含第一張圖片在 $(3, 1)$ 位置的 3×2 正確六張圖組。
 - (4) 如果第一張圖片在正確的 3×3 大拼圖中的 $(1, 3)$ 或 $(2, 3)$ 位置, 則我們可以從這張大拼圖中剪下一個包含第一張圖片在 $(1, 3)$ 位置的 2×3 正確六張圖組。
 - (5) 如果第一張圖片在正確的 3×3 大拼圖中的 $(3, 3)$ 位置, 則我們可以從這張大拼圖中剪下一個包含第一張圖片在 $(3, 2)$ 位置的正確六張圖片組。
2. 為了要找出所有包含第一張圖片在 $(1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2)$ 的 3×2 圖片組及在 $(1, 3)$ 位置的 2×3 正確圖片組, 我們只要找出所有包含第一張圖片的 2×2 圖片組, 因為第一張圖片在這 3×2 的表格中可能的位置有六種: (i, j) 其中 $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2$:
 - (1) 如果第一張圖片在 3×2 正確六張圖片組中的 $(1, 1)$ 或 $(2, 1)$ 位置, 則我們可以從這張 3×2 圖片組中剪下一個包含第一張圖片在 $(1, 1)$ 位置的 2×2 正確四張圖片組。

- (2) 如果第一張圖片在 3×2 正確六張圖片組中的 $(3, 1)$ 位置, 則我們可以從這張 3×2 圖片組中剪下一個包含第一張圖片在 $(2, 1)$ 位置的 2×2 正確四張圖組。
 - (3) 如果第一張圖片在 2×3 正確六張圖片組中的 $(1, 3)$ 位置, 則我們可以從這張 2×3 圖片組中剪下一個包含第一張圖片在 $(1, 2)$ 位置的 2×2 正確四張圖組。
 - (4) 如果第一張圖片在 3×2 正確六張圖片組中的 $(3, 2)$ 位置, 則我們可以從這張 3×2 圖片組中剪下一個包含第一張圖片在 $(2, 2)$ 位置的 2×2 正確四張圖組。
3. 爲了要找出所有包含第一張圖片的 2×2 圖片組, 我們也只要找出所有包含第一張圖片的 1×2 正確圖片組, 因爲
- (1) 如果第一張圖片在正確的 2×2 四張圖片組中的 $(1, 1)$ 或 $(2, 1)$ 位置, 則我們可以從這張 2×2 圖片組中剪下一個包含第一張圖片在 $(1, 1)$ 位置的 1×2 正確二張圖片組。
 - (2) 如果第一張圖片在正確的 2×2 四張圖片組中的 $(1, 2)$ 或 $(2, 2)$ 位置, 則我們可以從這張 2×2 圖片組中剪下一個包含第一張圖片在 $(1, 2)$ 位置的 1×2 正確二張圖片組。

正推的思維:

當我們提到某一些正確的圖片組, 只要固定第一張圖片的朝向之後, 我們可以只用圖片的編號來記錄, 這是由於每張圖片包含四種不同顏色的車子各半輛。因此當我們拼圖的時候, 爲了要滿足連接規定, 其餘圖片的朝向會被固定。所以不會引起誤解。

1. 所有包含第一張圖片的 1×2 圖片組

我們首先找出所有包含第一張圖片的 1×2 圖片組。由於第一張圖片的右邊車子是 R , 左邊的車子是 \overline{P} ; 而剩下的八張圖片中有 \overline{R} 的圖片編號是: 2, 3, 7, 9 及有 P 的圖片編號是: 2, 3, 5, 7, 8。所以由連接規定, 我們知道所有包含第一張圖片的 1×2 正確圖片組有 12, 13, 17, 19 及 21, 31, 51, 71, 81。

2. 所有包含第一張圖片的 2×2 圖片組

由於第一張圖片在 1×2 正確圖片組的 $(1, 1)$ 位置有 12, 13, 17, 19, 則我們

- (1) 把剩下的七張圖片中的二張圖片放在這個圖片組的下面一行, 形成一個第一張圖片在 $(1, 1)$ 位置的 2×2 四張圖組, 再檢查看看這個 2×2 四張圖組是否正確 (即滿足連接規定)。例如, 我們有 1×2 圖片組 12, 由於第一張圖片的南邊車子是 \overline{Y} 及第二張圖片的南邊車子是 P 。而剩下的七張圖片中有 \underline{Y} 的圖片編號是: 3, 6, 9, 有 \overline{P} 的圖片編號是: 4, 6, 9。我們只要檢查 34, 36, 39, 64, 69, 94, 96 就可以了。其中不符合連接規定有 36, 39, 而符合連接規定有 34, 64, 69, 94, 96。用同樣的想法, 繼續對其它的 1×2 圖片組 13, 17, 19 討

論、操作及檢查, 我們得到所有第一張圖片在 (1, 1) (即左上角) 位置的 2×2 正確四張圖組有 (圖五):

1 2	1 2	1 2	1 2	1 2	1 7	1 9	1 9
3 4	3 9	6 4	6 9	9 6	9 2	3 7	6 7

圖五

(2) 依次討論剩下的 1×2 圖片組 12, 13, 17, 19, 把剩下的七張圖片中的二張圖片放在這些 1×2 圖片組的上面一行, 檢查看看是否可以形成一個第一張圖片在 (1, 1) 位置的 2×2 正確四張圖組。經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後, 我們得到所有第一張圖片在 (2, 1) (即左下角) 位置的 2×2 正確四張圖組有 (圖六):

2 4	2 5	2 6	3 8	5 2	6 4	6 8	8 3	8 7	8 9
1 9	1 7	1 3	1 7	1 7	1 3	1 7	1 7	1 9	1 3

圖六

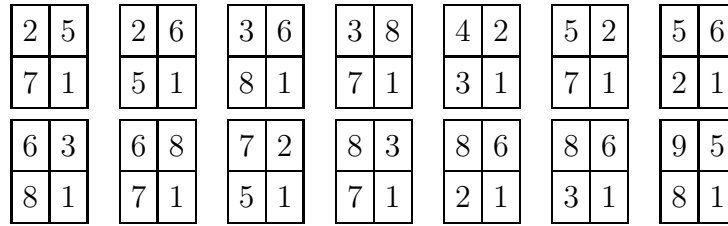
由於第一張圖片在 1×2 正確圖片組的 (1, 2) 位置有 21, 31, 51, 71, 81。

(2) 把剩下的七張圖片中的二張圖片放在這些 1×2 正確圖片組 21, 31, 51, 71, 81 的下面一行, 檢查看看是否可以形成一個第一張圖片在 (1, 1) 位置的 2×2 正確四張圖組。經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後, 我們得到所有第一張圖片在 (1, 2) (即右上角) 位置的 2×2 正確四張圖組有 (圖七):

3 1	3 1	5 1	7 1	8 1
4 9	7 6	9 2	9 2	7 2

圖七

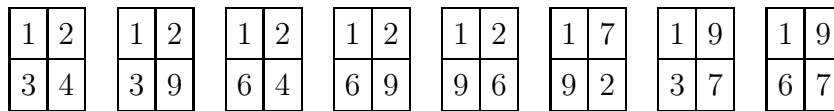
(3) 把剩下的七張圖片中的二張圖片放在這些 1×2 正確圖片組 21, 31, 51, 71, 81 的上面一行, 檢查看看是否可以形成一個第一張圖片在 (1, 1) 位置的 2×2 正確四張圖組。經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後, 我們得到所有第一張圖片在 (2, 2) (即右下角) 位置的 2×2 正確四張圖組有 (圖八):



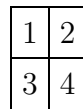
圖八

3. 所有包含第一張圖片在 (1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2) 的 3×2 圖片組或在 (1, 3) 位置的 2×3 正確圖片組

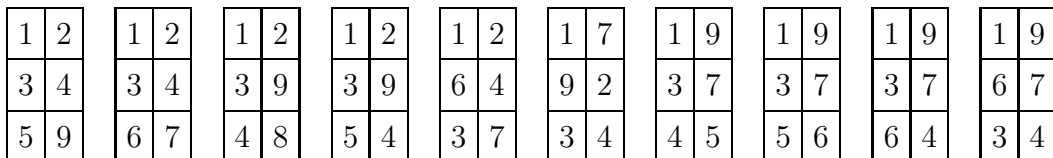
我們已經找出所有包含第一張圖片在 (1, 1) 位置的 2×2 圖片組:



(1) 把剩下的五張圖片中的二張圖片放在這些正確圖片組的上面一行，形成一個包含第一張圖片在 (3, 1) 位置的 3×2 圖片組。例如，我們有 2×2 正確圖片組



由於第五張圖片的南邊車子是 \bar{R} 及第二張圖片的南邊車子是 R 。而剩下的七張圖片中有 \bar{R} 的圖片編號是: 7, 9; 有 R 的圖片編號是: 5, 6, 8。我們只要檢查 57、59、67、69、87、89 就可以了。其中不符合連接規定有 57、69、87、89，而符合連接規定有 59、67 用同樣的想法，繼續對其它的 圖片組討論、操作及檢查，我們得到所有左上角 (即 (1, 1) 的位置) 是第一張圖片的 3×2 正確圖片組有 (圖九):



圖九

我們已經找出所有第一張圖片在 (2, 1) (即左下角) 位置的 2×2 正確四張圖組有:

2	4	2	5	2	6	3	8	5	2	6	4	6	8	8	3	8	7	8	9
1	9	1	7	1	3	1	7	1	7	1	3	1	7	1	7	1	9	1	3

- (2) 把剩下的五張圖片中的二張圖片放在這些 2×2 正確圖片組的下面一行, 形成一個包含第一張圖片在 (2, 1) 位置的 3×2 圖片組, 經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後, 我們得到所有 (2, 1) 的位置是第一張圖片的 3×2 正確圖片組如圖十:

2	4	2	4	3	8	6	8	8	3
1	9	1	9	1	7	1	7	1	7
3	7	6	7	9	2	9	2	9	2

圖十

- (3) 把剩下的五張圖片中的二張圖片放在這些 2×2 正確圖片組的上面一行, 形成一個包含第一張圖片在 (3, 1) 位置的 3×2 圖片組, 經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後, 我們得到所有 (3, 1) 的位置是第一張圖片的 3×2 正確圖片組如圖十一:

(4)

4	5	4	5	7	9	9	5
2	6	8	9	6	4	4	6
1	3	1	3	1	3	1	3

圖十一

我們已經找出所有第一張圖片在 (1, 2) 位置的 2×2 正確四張圖組如下:

3	1	3	1	5	1	7	1	8	1
4	9	7	6	9	2	9	2	7	2

- (5) 把剩下的五張圖片中的二張圖片放在這些 2×2 正確圖片組的左邊一行, 形成一個包含第一張圖片在 (1, 3) 位置的 2×3 圖片組, 經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後, 我們得到所有 (1, 3) 的位置是第一張圖片的 2×3 正確圖片組如圖十二:

4	5	1	4	7	1	4	8	1	5	7	1	6	7	1	7	5	1	9	8	1
8	9	2	5	9	2	3	7	2	7	9	2	4	9	2	6	9	2	3	7	2

圖十二

我們已經找出所有第一張圖片在 (2, 2) (即右下角) 位置的 2×2 正確四張圖組有:

2 5	2 6	3 6	3 8	4 2	5 2	5 6
7 1	5 1	8 1	7 1	3 1	7 1	2 1
6 3	6 8	7 2	8 3	8 6	8 6	9 5
8 1	7 1	5 1	7 1	2 1	3 1	8 1

- (6) 把剩下的五張圖片中的二張圖片放在這些 2×2 正確圖片組的上面一行形成一個包含第一張圖片在 (3, 2) 位置的 3×2 圖片組, 經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後, 我們得到所有 (3, 2) 的位置是第一張圖片的 3×2 正確圖片組如圖十三:

2 4	2 4	2 7	3 6	3 7	4 3	4 9
6 3	9 5	8 6	9 5	5 6	2 6	3 6
8 1	8 1	3 1	8 1	2 1	5 1	8 1
5 7	5 9	5 9	5 9	7 9	8 7	9 3
3 6	4 2	6 3	7 6	5 6	2 6	5 6
8 1	3 1	8 1	2 1	2 1	5 1	2 1

圖十三

4. 九張圖片的 3×3 正方形正確拼圖:

我們已經找出所有左上角 (即 (1, 1) 的位置) 是第一張圖片的 3×2 正確圖片組有:

1 2	1 2	1 2	1 2	1 2	1 7	1 9	1 9	1 9	1 9
3 4	3 4	3 9	3 9	6 4	9 2	3 7	3 7	3 7	6 7
5 9	6 7	4 8	5 4	3 7	3 4	4 5	5 6	6 4	3 4

- (1) 把剩下的三張圖片放在這些 3×2 正確圖片組的右邊一行形成一個 3×3 正方形九張正確圖片拼圖。例如, 我們有 3×2 圖片組

1 2
3 4
5 9

由於第二張圖片的東邊車子是 \underline{Y} 、第四張圖片的東邊車子是 \overline{Y} 及第九張圖片的東邊車子是 \underline{Y} 。而剩下的三張圖片中有 \overline{Y} 的圖片編號是: 7、8; 有 \underline{Y} 的圖片編號是: 6。我們只要

檢查 768、867 就可以了，結果都不符合連接規定。用同樣的想法，繼續對其它的 2×2 圖片組討論、操作及檢查，經過類似的討論、操作及檢查之後，我們得到所有 (1, 1) 的位置是第一張圖片的正確大拼圖如圖十四：

1	2	8
3	4	9
6	7	5

1	2	8
6	4	9
3	7	5

圖十四

- (2) 把剩下的三張圖片放在這個 3×2 圖片組的左邊一行，形成一個 3×3 正方形九張圖片拼圖。經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後，我們證明沒有 (1, 1) 的位置是第一張圖片的正確大拼圖。

我們知道所有 (2, 1) 的位置是第一張圖片的 3×2 圖片組有：

2	4
1	9
3	7

2	4
1	9
6	7

3	8
1	7
9	2

6	8
1	7
9	2

8	3
1	7
9	2

- (3) 把剩下的三張圖片放在這些 3×2 正確圖片組的右邊一行，形成一個 3×3 正方形九張圖片拼圖。經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後，我們證明沒有 (2, 1) 的位置是第一張圖片的正確大拼圖。
- (4) 把剩下的三張圖片放在這些 3×2 正確圖片組的左邊一行，形成一個 3×3 正方形九張圖片拼圖。經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後，我們證明沒有 (2, 2) 的位置是第一張圖片的正確大拼圖。

我們得到所有 (3, 1) 的位置是第一張圖片的 3×2 圖片組有：

4	5
2	6
1	3

4	5
8	9
1	3

7	9
6	4
1	3

9	5
4	6
1	3

- (5) 把剩下的三張圖片放在這些 3×2 正確圖片組的右邊一行，形成一個 3×3 正方形九張圖片拼圖。經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後，我們證明沒有 (3, 1) 的位置是第一張圖片的正確大拼圖。

- (6) 把剩下的三張圖片放在這些 3×2 正確圖片組的左邊一行, 形成一個 3×3 正方形九張圖片拼圖。經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後, 我們得到所有 (3, 2) 的位置是第一張圖片的正確大拼圖如圖十五所表示:

8	7	9
2	6	4
5	1	3

圖十五

我們知道所有 (1, 3) 的位置是第一張圖片的 2×3 圖片組有:

4	5	1
8	9	2

4	7	1
5	9	2

4	8	1
3	7	2

5	7	1
7	9	2

6	7	1
4	9	2

7	5	1
6	9	2

9	8	1
3	7	2

- (7) 把剩下的三張圖片放在這些 3×2 正確圖片組的下面一行, 形成一個 3×3 正方形九張圖片拼圖。經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後, 我們證明沒有 (1, 3) 的位置是第一張圖片的正確大拼圖。
- (8) 把剩下的三張圖片放在這些 3×2 正確圖片組的上面一行, 形成一個 3×3 正方形九張圖片拼圖。經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後, 我們得到所有 (2, 3) 的位置是第一張圖片的正確大拼圖如圖十六所表示:

3	6	8
4	7	1
5	9	2

4	3	8
5	7	1
6	9	2

5	3	8
4	7	1
4	9	2

6	3	8
4	7	1
5	9	2

3	6	8
4	7	1
5	9	2

4	3	8
5	7	1
6	9	2

5	3	8
6	7	1
4	9	2

6	3	8
4	7	1
5	9	2

圖十六

我們知道所有 (3, 2) 的位置是第一張圖片的 3×2 圖片組有:

2	4	2	4	2	7	3	6	3	7	4	3	4	9
6	3	9	5	8	6	9	5	5	6	2	6	3	6
8	1	8	1	3	1	8	1	2	1	5	1	8	1
5	7	5	9	5	9	5	9	7	9	8	7	9	3
3	6	4	2	6	3	7	6	5	6	2	6	5	6
8	1	3	1	8	1	2	1	2	1	5	1	2	1

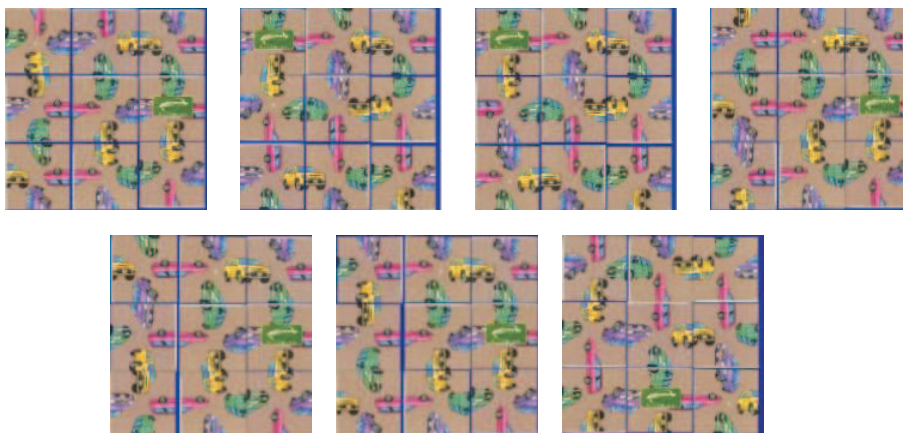
- (9) 把剩下的三張圖片放在這些 3×2 正確圖片組的左邊一行, 形成一個 3×3 正方形九張圖片拼圖。經過類似 (1) 中的討論、操作及檢查之後, 我們證明沒有 (3, 3) 的位置是第一張圖片的正確大拼圖。

三、研究發現

從上述的研究我們發現:

所有圖一中九張拼圖圖片的 3×3 正確大拼圖有下列七種:

1	2	8	1	2	8	8	7	9	3	6	8	4	3	8	5	3	8	6	3	8
3	4	9	6	4	9	2	6	4	4	7	1	5	7	1	6	7	1	4	7	1
6	7	5	3	7	5	5	1	3	5	9	2	6	9	2	4	9	2	5	9	2



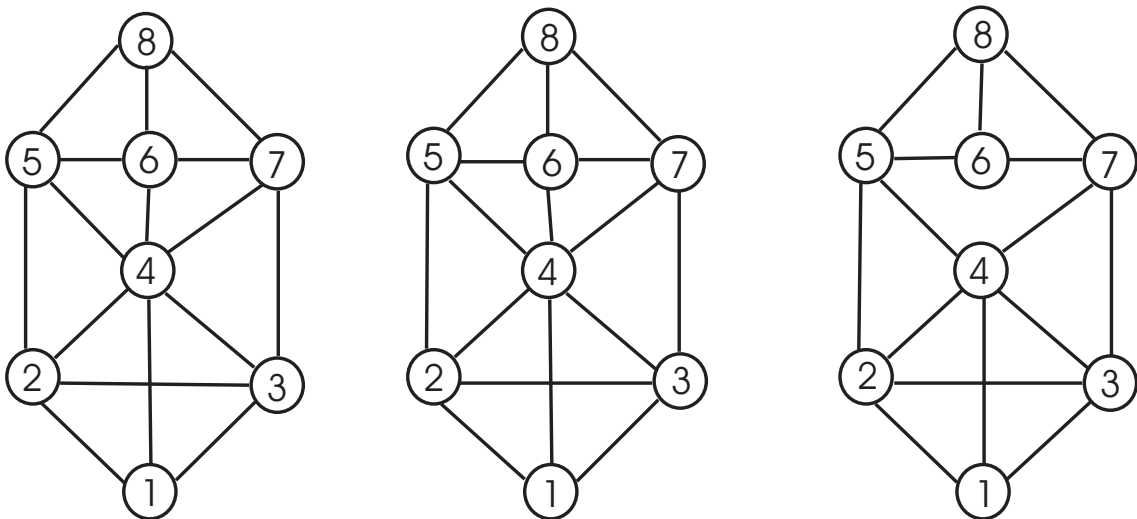
四、討論

我們得到所有的 3×2 正確圖片組中第一張圖片在 (1, 1) 的位置有 10 組; 在 (2, 1) 的位置有 5 組; 在 (3, 1) 的位置有 4 組; 在 (1, 2) 的位置有 6 組; 在 (2, 2) 的位置有 8 組; 在 (3, 2) 的位置有 14 組。另外我們得到所有的 2×3 正確圖片組第一張圖片在 (1, 1) 的位置有 8 組; 在 (1, 2) 的位置有 4 組; 在 (1, 3) 的位置有 7 組; 在 (2, 1) 的位置有 8 組; 在 (2, 2) 的位置有 12 組; 在 (2, 3) 的位置有 14 組。

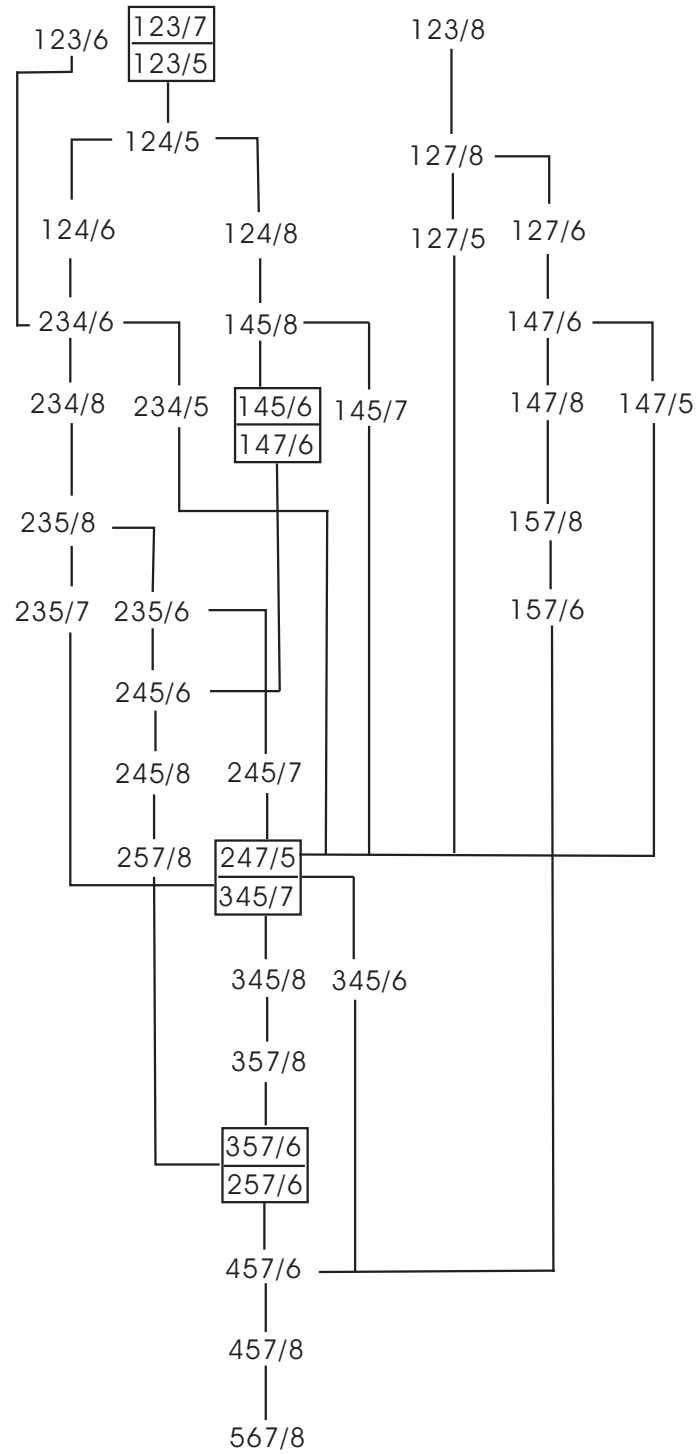
爲了找出所有九張圖片的 3×3 正確拼圖, 在本文中的改良方法中, 我們只要找出所有包含第一張圖片在 (3, 1), (1, 2), (3, 2) 的正確圖片組及找出所有包含第一張圖片 (1, 3) 的 2×2 正確圖片組, 這些 3×2 或 2×3 圖片組共有四十組。我們也可以只要找出所有包含第一張圖片在 (1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2) 的 3×2 正確圖片組及找出所有包含第一張圖片 (1, 1), (1, 2), 的 2×3 正確圖片組, 這些 3×2 或 2×3 圖片組共有三十六組。經過分析及檢查, 我們知道爲了找出所有九張圖片的 3×3 正確拼圖, 至少需要三十六組 3×2 或 2×3 圖片組。在文中我們採取的是較方便記憶而又不太麻煩的選擇。

五、研究結果的應用: 捉強盜遊戲

我們希望用這種技巧應用來找尋玩遊戲獲勝的策略。下面是玩“捉強盜遊戲”。捉強盜遊戲是棋盤上(如圖十七)包圍戰之一種。首先甲方持白棋三顆代表警察, 將棋子固定置於 1, 2, 3 的位置, 乙方持黑棋一顆子代表強盜, 可自由選擇在 5, 6, 7, 8 中任意位置, 然後甲、乙兩人輪流移棋子, 甲方(白棋)先開始移動棋子, 包圍戰隨即開始。



圖十七



圖十八

移棋規則:

- (一)、圖中圓圈 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 是放置棋子的位置。
- (二)、棋子的移動只限於由一圓圈移置相鄰的圓圈。
- (三)、白棋不准後退, 黑棋則可, 雙方都不可以吃對方的棋, 一個位置最多放一個棋子, 白棋不可移到同一位置兩次或兩次以上。
- (四)、輸贏的規定: 如果白棋能圍困黑棋, 使它不能移動, 則甲方 (白棋) 為贏家, 如果黑棋能突圍而出, 超越到包圍者 (白棋) 的背後則乙方 (黑棋) 為贏家。

經過用正推、反推的思維想法, 細心、耐心地找出所有可能的情形, 並仔細地觀察和分類。再合併對稱的情形, 這樣可以使得我們的求解過程愈趨簡單, 最後用樹狀圖形來作解題的方法。

由圖十八的樹狀圖形來看, 我們知道在玩“捉強盜遊戲”時, 甲 (持白棋) 有獲勝的優勢。

六、結論

研究拼圖遊戲這個問題之後, 讓我學到解問題的方法及找尋玩遊戲必贏的策略: 首先要了解問題的規定, 分類討論、操作及檢查之後, 仔細地觀察規律, 再分析出更多的特性與規律, 再討論、操作及檢查。這些過程中, 我

- (1) 必須要找出所有可能的情形, 不能有任何的遺漏, 排除許多不必要的嘗試及避免重複相同的錯誤: 正推、反推的思維想法。
 - (2) 要尋找簡易明瞭的記號:。
 - (3) 要記錄操作的過程: 樹狀圖形可來作有系統地分析及簡易明瞭及的記錄操作的過程。
- 這些過程中並不一定要用什麼高深的數學技巧, 但是必須要有細心、耐心。

七、參考資料

1. 王芳夫、王登傳編著, 數學遊戲大觀, 前程出版社, 高雄市, 1987, p.134-135。
2. 張遠南編著, 使人聰明的智力遊戲, 九章出版社出版。
3. 趙文敏, 寓數學於遊戲第一輯, 台北九章出版社, 1981。
4. 孫君儀、葉均承、陳天任, 土撥鼠遊戲研究, 中央研究院數學傳播第23卷, 第四期, p.32-38。
5. 葉均承, Apex 遊戲研究, 中央研究院數學傳播, 第24卷, 第三期, p.66-83。
6. 葉洵君、顏德琮、連信欽, 所羅門寶藏, 科學教育月刊, 民90年, 第245期, p.10-17。
7. Brian Bolt 著, 黃啓明譯, 數學遊樂園。

—本文作者現就讀於台北市立實踐國中三年級—