韋達定理在三角與解析幾何中的應用

胡紹宗

衆所周知, 韋達定理在中學數學中有著廣泛的應用, 特別在代數中的應用最爲多多, 這裡不去贅述。本文著重討論它在三角與解析幾何中的應用。

韋達定理: 設 n 次代數方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ $(a_i(i=0,1,2,\ldots,n)$ 爲複數, 且 $a_0\neq 0)$ 的 n 個根爲 $x_1,x_2,\ldots,x_n$, 則

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},\\
&x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0},\\
&x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n\\
&=-\frac{a_3}{a_0},\\
&\cdots\cdots\\
&x_1x_2x_3\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}
\end{aligned}$$

某些三角恆等式, 如 $\prod_{i=1}^{n}\tan\frac{i\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}$, $\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{i\pi}{2n+1}=\frac{2n-1}{4}$ 等都可利用韋達定理來證明。

例1: 設 n 爲任一正整數, 則

(i) $\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$,

(ii) $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$.

證: (i) 考察方程

$$\sin(2n+1)x=0, \tag{1}$$

顯然, $x_i=\frac{i\pi}{2n+1}(i=1,2,\ldots,n)$ 是方程 (1) 的一組特解。由棣模弗公式, 有

$$\begin{aligned}
&\sin(2n+1)x\\
&=C_1^{2n+1}\sin x\cos^{2n}x-C_3^{2n+1}\sin^3x\\
&\quad\cos^{2(n-1)}x+C_5^{2n+1}\sin^5x\cos^{2(n-2)}x\\
&\quad-C_7^{2n+1}\sin^7x\cos^{2(n-3)}x+\cdots\\
&\quad+(-1)^nC_{2n+1}^{2n+1}\sin^{2n+1}x\\
&=\sin x[C_1^{2n+1}\cos^{2n}x-C_3^{2n+1}\sin^2x\\
&\quad\cos^{2(n-1)}x+C_5^{2n+1}\sin^4x\cos^{2(n-2)}x\\
&\quad-C_7^{2n+1}\sin^6x\cos^{2(n-3)}x+\cdots\\
&\quad+(-1)^nC_{2n+1}^{2n+1}\sin^{2n}x].
\end{aligned}\tag{2}$$

以 $1-\sin^2x$ 代換 (2) 式中的 $\cos^2x$, 有

$$\begin{aligned}
&\sin(2n+1)x\\
&=\sin x[C_1^{2n+1}(1-\sin^2x)^n\\
&\quad-C_3^{2n+1}\sin^2x(1-\sin^2x)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$+C_5^{2n+1}\sin^4 x(1-\sin^2 x)^{n-2}$$
$$-C_7^{2n+1}\sin^6 x(1-\sin^2 x)^{n-3}$$
$$+\cdots+(-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}\sin^{2n} x]$$
$$=\sin x[C_1^{2n+1}C_0^n-(C_1^{2n+1}C_1^n$$
$$+C_3^{2n+1}C_0^{n-1})\sin^2 x$$
$$+(C_1^{2n+1}C_2^n+C_3^{2n+1}C_1^{n-1}$$
$$+C_5^{2n+1}C_0^{n-2})\sin^4 x$$
$$-(C_1^{2n+1}C_3^n+C_3^{2n+1}C_2^{n-1}$$
$$+C_5^{2n+1}C_1^{n-2}+C_7^{2n+1}C_0^{n-3})\sin^6 x$$
$$+\cdots+(-1)^n(C_1^{2n+1}+C_3^{2n+1}$$
$$+C_5^{2n+1}+C_7^{2n+1}+\cdots$$
$$+C_{2n+1}^{2n+1})\sin^{2n} x].$$

令$y=sin^2 x$, 則方程

$$C_1^{2n+1}C_0^n-(C_1^{2n+1}C_1^n+C_3^{2n+1}C_0^{n-1})y$$
$$+(C_1^{2n+1}C_2^n+C_3^{2n+1}C_1^{n-1}$$
$$+C_5^{2n+1}C_0^{n-2})y^2-(C_1^{2n+1}C_3^n$$
$$+C_3^{2n+1}C_2^{n-1}+C_5^{2n+1}C_1^{n-2}$$
$$+C_7^{2n+1}C_0^{n-3})y^3+\cdots$$
$$+(-1)^n(C_1^{2n+1}+C_3^{2n+1}+C_5^{2n+1}$$
$$+C_7^{2n+1}+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1})y^n=0$$

的 n 個根爲 $y_i=\sin^2\frac{i\pi}{2n+1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,n)$。

由韋達定理, 有

$$y_1y_2y_3\cdots y_n$$
$$=\sin^2\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{2n+1}$$
$$\cdots\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=C_1^{2n+1}C_0^n/(C_1^{2n+1}+C_3^{2n+1}+C_5^{2n+1}$$
$$+C_7^{2n+1}+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}),$$

而 $C_1^{2n+1}C_0^n=2n+1$,

$$2^{2n+1}=(1+1)^{2n+1}$$
$$=C_0^{2n+1}+C_1^{2n+1}+C_2^{2n+1}$$
$$+C_3^{2n+1}+C_4^{2n+1}+C_5^{2n+1}$$
$$+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1},$$
$$0=(1-1)^{2n+1}=C_0^{2n+1}-C_1^{2n+1}$$
$$+C_2^{2n+1}-C_3^{2n+1}+C_4^{2n+1}$$
$$-C_5^{2n+1}+\cdots+C_{2n}^{2n+1}$$
$$-C_{2n+1}^{2n+1},$$

$$C_1^{2n+1}+C_3^{2n+1}+C_5^{2n+1}+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}$$
$$=C_0^{2n+1}+C_2^{2n+1}+C_4^{2n+1}+\cdots+C_{2n}^{2n+1}$$
$$=\frac{2^{2n+1}}{2}=2^{2n},$$

故

$$\sin^2\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{2n+1}$$
$$\ldots\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{2n+1}{2^{2n}},$$

即

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{3\pi}{2n+1}\cdots$$
$$\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

(ii) 在 (2) 式中, 以 $1-\cos^2 x$ 代換 $\sin^2 x$, 有

$$\sin(2n+1)x$$
$$=\sin x[C_1^{2n+1}\cos^{2n} x-C_3^{2n+1}$$
$$(1-\cos^2 x)\cos^{2(n-1)} x+C_5^{2n+1}$$
$$(1-\cos^2 x)^2\cos^{2(n-2)} x-C_7^{2n+1}$$

$$(1-\cos^2 x)^3\cos^{2(n-3)} x + \cdots$$
$$+(-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}(1-\cos^2 x)^n]$$
$$=\sin x[(C_1^{2n+1}+C_3^{2n+1}+C_5^{2n+1}$$
$$+C_7^{2n+1}+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1})\cos^{2n} x$$
$$-(C_3^{2n+1}C_1^1+C_5^{2n+1}C_1^2+C_7^{2n+1}C_1^3$$
$$+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}C_1^n)\cos^{2(n-1)} x$$
$$+(C_5^{2n+1}C_2^2+C_7^{2n+1}C_2^3+\cdots$$
$$+C_{2n+1}^{2n+1}C_2^n)\cos^{2(n-2)} x-(C_7^{2n+1}C_3^3$$
$$+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}C_3^n)\cos^{2(n-3)} x+\cdots$$
$$+(-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}].$$

令 $y=\cos^2 x$, 則方程

$$(C_1^{2n+1}+C_3^{2n+1}+C_5^{2n+1}+C_7^{2n+1}$$
$$+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1})y^n-(C_3^{2n+1}C_1^1$$
$$+C_5^{2n+1}C_1^2+C_7^{2n+1}C_1^3$$
$$+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}C_1^n)y^{n-1}$$
$$+(C_5^{2n+1}C_2^2+C_7^{2n+1}C_2^3+\cdots$$
$$+C_{2n+1}^{2n+1}C_2^n)y^{n-2}-(C_7^{2n+1}C_3^3+\cdots$$
$$+C_{2n+1}^{2n+1}C_3^n)y^{n-3}+\cdots+(-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}=0$$

的 n 個根爲 $y_i=\cos^2\frac{i\pi}{2n+1}$, $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$。

由韋達定理, 有

$$y_1y_2y_3\cdots y_n$$
$$=\cos^2\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos^2\frac{2\pi}{2n+1}$$
$$\cdot\cos^2\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\cos^2\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=C_{2n+1}^{2n+1}/(C_1^{2n+1}+C_3^{2n+1}+C_5^{2n+1}$$
$$+C_7^{2n+1}+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1})$$
$$=\frac{1}{2^{2n}},$$

即

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{2n+1}$$
$$\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=\frac{1}{2^n}.$$

解析幾何是以代數方法處理幾何問題, 而代數方法的論證和推導往往可以利用韋達定理巧妙地完成。

例2: 從橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 外一點作橢圓的兩切線, 若兩切線的夾角爲直角, 求這一動點的軌跡方程。

解: 設 $P(x_0,y_0)$ 爲橢圓外一點, 過 P 點作橢圓的兩條切線, 切點爲 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, 則

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,$$

且切線方程爲

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,\ \frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1.$$

因 P 爲兩切線的交點, 故有

$$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}=1,$$
$$\frac{x_0x_2}{a^2}+\frac{y_0y_2}{b^2}=1.$$

由方程組 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}=1\end{cases}$ 消去 y_1 得

$$(b^2x_0^2+a^2y_0^2)x_1^2-2a^2b^2x_0x_1$$
$$+a^4(b^2-y_0^2)=0, \tag{1}$$

再由方程組 $\begin{cases}\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\\ \frac{x_0x_2}{a^2}+\frac{y_0y_2}{b^2}=1\end{cases}$ 消去 y_2 得

$$(b^2x_0^2+a^2y_0^2)x_2^2-2a^2b^2x_0x_2$$
$$+a^4(b^2-y_0^2)=0, \tag{2}$$

若 x_1+x_2, 據 (1) 及 (2) 可知 x_1 及 x_2 爲方程

$$(b^2x_0^2+a^2y_0^2)x^2-2a^2b^2x_0x$$
$$+a^4(b^2-y_0^2)=0, \qquad (3)$$

的兩個根。

由韋達定理, 得

$$x_1+x_2=2a^2b^2x_0/(b^2x_0^2+a^2y_0^2),$$
$$x_1x_2=a^4(b^2-y_0^2)/(b^2x_0^2+a^2y_0^2). \quad (4)$$

若 $x_1=x_2$, 則由對稱性知 $y_0=0$, 又據 $\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}=1$ 則得 $x_0x_1=a^2$, 因而 $x_1+x_2=2x_1=\frac{2a^2}{x_0}$,$x_1x_2=x_1^2=\frac{a^4}{x_0^2}$, 故此時 (4) 亦成立。

同理可知: 不論 $y_1\neq y_2$ 或 $y_1=y_2$, 恆有

$$y_1+y_2=2a^2b^2y_0/(b^2x_0^2+a^2y_0^2),$$
$$y_1y_2=b^4(a^2-x_0^2)/(b^2x_0^2+a^2y_0^2). \, (5)$$

若兩切線無鉛垂方向者, 則因二者互相垂直, 故

$$\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2}=-1,$$

從而

$$(x_0-x_1)(x_0-x_2)+(y_0-y_1)(y_0-y_2)=0,$$

即

$$x_0^2-x_0(x_1+x_2)+x_1x_2+y_0^2-y_0(y_1+y_2)$$
$$+y_1y_2=0. \qquad (6)$$

若兩切線恰爲鉛垂切線及水平切線, 則 P 之坐標爲 $(x_0,y_0)=(\pm a,\pm b)$, 而 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$ 則爲橢圓之相鄰二頂點, 故顯然有

$$(x_0-x_1)(x_0-x_2)+(y_0-y_1)(y_0-y_2)=0,$$

遂知此時 (6) 亦成立。

將 (4) 及 (5) 代入 (6), 可推得

$$x_0^2-2a^2b^2x_0^2/(b^2x_0^2+a^2y_0^2)$$
$$+a^4(b^2-y_0^2)/(b^2x_0^2+a^2y_0^2)$$
$$+y_0^2-2a^2b^2y_0^2/(b^2x_0^2+a^2y_0^2)$$
$$+b^4(a^2-x_0^2)/(b^2x_0^2+a^2y_0^2)=0,$$

$$(b^2x_0^2+a^2y_0^2)x_0^2-2a^2b^2x_0^2$$
$$+a^4(b^2-y_0^2)+(b^2x_0^2+a^2y_0^2)y_0^2$$
$$-2a^2b^2y_0^2+b^4(a^2-x_0^2)=0,$$

$$(b^2x_0^2+a^2y_0^2)(x_0^2+y_0^2)-a^2b^2(x_0^2+y_0^2)$$
$$-(a^2b^2x_0^2+a^4y_0^2)-(a^2b^2y_0^2+b^4x_0^2)$$
$$+(a^4b^2+a^2b^4)=0,$$

$$(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2)(x_0^2+y_0^2)$$
$$-a^2(b^2x_0^2+a^2y_0^2)-b^2(b^2x_0^2+a^2y_0^2)$$
$$+a^2b^2(a^2+b^2)=0,$$

$$(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2)(x_0^2+y_0^2)$$
$$-(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2)(a^2+b^2)=0,$$

$$(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2)$$
$$[(x_0^2+y_0^2)-(a^2+b^2)]=0.$$

因 $P(x_0,y_0)$ 在橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 外, 故 $b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2>0$, 遂知所求軌跡包含於圓 $x^2+y^2=a^2+b^2$ (落於圓周上)。

反之, 設 $P(x_0,y_0)$ 爲圓 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上任一點, 過 P 所作橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的兩條切線爲 PP_1 及 PP_2, 其中 $P_1(x_1,y_1)$

及 $P_2(x_2,y_2)$ 爲切點。若 $x_0=x_1$, 則 PP_1 爲鉛垂切線, 故 $x_0=\pm a$, 而 $y_0=\pm b$ (注意 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$), 遂知 PP_2 爲水平切線; 同理可知: 若 $x_0=x_2$, 則 PP_2 爲鉛垂切線, 而 PP_1 爲水平切線。若 $(x_0-x_1)(x_0-x_2)\neq 0$, 則由 (4),(5) 及 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$ 可推得 (6) 式, 故

$$(x_0-x_1)(x_0-x_2)+(y_0-y_1)(y_0-y_2)=0,$$

以 $(x_0-x_1)(x_0-x_2)$ 除之, 並移項, 即有

$$\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2}=-1,$$

故切線 PP_1 與 PP_2 垂直。

綜上, 遂知: 所求軌跡即以原點爲圓心, 以 $\sqrt{a^2+b^2}$ 爲半徑之圓, 其方程爲

$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

例3: 給定雙曲線 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$。過點 $A(1,1)$ 能否作直線 m, 使 m 與所給雙曲線交兩點 P_1 及 P_2, 且點 A 是線段 P_1P_2 的中點。這樣的直線 m 如果存在, 求出它的方程; 如果不存在, 說明理由。

解: 若 m 存在, 可設其方程爲

$$y=kx+b. \tag{1}$$

由方程組 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx+b\end{cases}$ 消去 y, 得

$$(2-k^2)x^2-2kbx-(b^2+2)=0, \tag{2}$$

設 P_1 及 P_2 的坐標分別爲 (x_1,y_1) 及 (x_2,y_2), 則 x_1, x_2 爲方程 (2) 的兩個根。

由韋達定理, 得

$$x_1+x_2=2kb/(2-k^2).$$

因線段 P_1P_2 的中點爲 $A(1,1)$, 故

$$1=(x_1+x_2)/2=kb/(2-k^2). \tag{3}$$

將 $x=kb/(2-k^2)$, $y=1$ 代入 (1), 得

$$1=k\frac{kb}{2-k^2}+b=2b/(2-k^2). \tag{4}$$

由 (4) $\div$ (3) 知 $k=2$, 代入 (4) 即得 $b=-1$。將 $k=2$, $b=-1$ 代入 (2), 得

$$2x^2-4x+3=0. \tag{5}$$

根據 m 存在的假設, 方程 (5) 應有兩個實根, 但顯然, 其判別式 $\triangle<0$, 矛盾, 因此直線 m 不存在。

例4: 若長爲 $l(l\geq 1)$ 的線段 AB 的兩個端點在拋物線 $y=x^2$ 上移動, 試求其中點 M 到 x 軸的最短距離。

解: 設 AB 所在的直線方程爲 $y=kx+b$, 其與拋物線 $y=x^2$ 的交點爲 $A(m,m^2)$, $B(n,n^2)$。

由 $\begin{cases}y=kx+b\\ y=x^2\end{cases}$ 得 $x^2-kx-b=0$.

由韋達定理, 得

$$m+n=k,\ mn=-b. \tag{1}$$

設線段 AB 的中點爲 $M(x,y)$, 則

$$y=\frac{m^2+n^2}{2}=\frac{(m+n)^2-2mn}{2}$$
$$=\frac{k^2}{2}+b. \tag{2}$$

由題意, $l^2=(m-n)^2+(m^2-n^2)$, 即

$$[(m+n)^2-4mn][1+(m+n)^2]=l^2. \tag{3}$$

將 (1) 代入 (3), 得 $(k^2+4b)(1+k^2)=l^2$, 即

$$b=\frac{1}{4}(\frac{l^2}{1+k^2}-k^2). \tag{4}$$

將 (4) 代入 (2), 得

$$\begin{aligned} y&=\frac{k^2}{2}+\frac{1}{4}(\frac{l^2}{1+k^2}-k^2)\\ &=\frac{1}{4}(k^2+\frac{l^2}{1+k^2})\\ &=\frac{1}{4}(1+k^2+\frac{l^2}{1+k^2}-1). \end{aligned}$$

因 $(1+k^2)\cdot\frac{l^2}{1+k^2}=l^2$ 為定值, 故當 $1+k^2=\frac{l^2}{1+k^2}$, 即 $k=\pm\sqrt{l-1}$ 時, y 取最小值

$$\frac{1}{4}(l-1+\frac{l^2}{l})=\frac{1}{4}(2l-1).$$

—本文作者任教於安徽阜陽師院—