

# 有朋自遠方來——

## 專訪 Robert Miura 教授



受訪者：Robert Miura (以下簡稱 M)

訪問者：劉太平 (以下簡稱 劉)

記 錄：王太和

地 點：中央研究院數學研究所

時 間：2001年1月

Robert M. Miura, 1938年生於美國加州 Fresno 附近。U. C. Berkeley 機械系學士、碩士, Princeton 航空機械系博士。訪談時任教於加拿大 The University of British Columbia, 也是該校一個跨系研究群——數學生物研究群的成員, 目前任教美國 New Jersey Institute of Technology 之數學科學系。

主要研究興趣有: 常微分方程、偏微分方程、逼近理論、生物數學等。

劉: Robert, 非常感謝你能抽空接受我們的訪談。我想我們就從你小時候談起。據我所知, 你是在 Fresno 附近出生的, 是嗎?

M: 是的。我在 California 中部的 Selma 出生, 地點位於 99 號公路附近, 靠近 Fresno 的地方, 你應該知道這個地方, 因為你是 Stanford 的教授, 時間是在二次世界大戰之前。大戰爆發之後, 我們就被迫拘留在 Arkansas 跟 Arizona 的軍事基地裡面。我們被安置在營區裡。然後在 1945 年到 California。

劉: 你們住在營區的時間大約有多久?

M: 從 1942 到 1945, 大約是三年的時間。

劉: 你還記得這段時期的事嗎?

M: 哦!我還記得 Arkansas 的營區, 比方說當時我們是住在一個現在已不存在叫 Jerome 的地方。那個地方有點像是個沼澤, 非常潮溼, 冬天的時候也會下雪。據我所知如今那裡已經沒有營帳, 也沒有軍事基地了。我還記得生平第一次吃到香蕉就是在這個地方。這大概就是我对這個時期的印象。我們住在軍營裡。不過, 對我的父母來說, 這段時期是非常艱難的, 因為他們失去了他們在 Cali-

fornia 所有的一切。

劉: 你的父母親當時在 California 是從事什麼工作呢?

M: 他們是農夫。我的父母親務農, 而且那時候他們才剛買了一塊農地, 還有卡車跟一輛汽車。但是由於戰爭的緣故, 他們失去了這一切。所以, 情況並不是很好。另一方面, 對我們小孩子來說就不一樣了, 這像在渡假一樣, 一種全新的冒險, 有很多事情我以前從來都沒有見過。我當時年紀很小。我們去 Jerome 的時候, 我大概只有4歲吧。我已經不記得我們在那裡待了1年還是2年, 之後我們就被遷移到 Arizona 一個叫 Gila Bend 的地方。這個地方跟之前那裡就完全不一樣, 非常乾燥。我很清楚的記得我們營區的外面還有柵欄圍起來, 當然也還有警衛站崗。不過我們還是可以自由進出營區及在營區間自由行動。那裡還有另一個叫 Poston 的營。我們就搭卡車 (我想那基本上是卡車, 不是巴士) 在這兩個營之間來來去去。我在那裡開始上小學一年級。後來1945年, 事實上是在太平洋戰爭結束之前, 我們就已經回到 California。我想大概是因為有關當局認定大戰一定會快結束, 所以讓我們回到 California 去。當然回到 California 之後日子並不好過, 因為當時普遍有反日情結及對日本人的歧見。我還記得我在學校跟其他同學打架。我們剛開始是跟一個 uncle 住在一起。這個 uncle 很幸運在離開 California 之前托他的鄰居幫忙照顧他的農場, 而回來之後, 拿回他的農場。

劉: 而你們就沒有那麼幸運了?

M: 我們就沒有那麼幸運, 我們的農場不見了。我的父母只好從作按日計酬勞動工作, 從頭開始。我記得我們的第一間房子只有兩個房間及廚房、浴室。

劉: 你們家裡總共有幾個人?

M: 5個。三個小孩。姐姐比我大二歲, 弟弟比我小二歲, 我排行老二。之後我們搬到父親新租的地方住, 基本上, 父親是負責管理那邊的農場。然後我們又再一次搬家。這個新家, 不像是租的, 有點像是佃農。父親可以獲得一部分農作物的收入, 大約是50%的收入。在1950年初期, 父親買了一個農場, 他終於又再度擁有自己的農場。當時我在一間很小的學校上學。學校只有二間教室, 對我卻極有益處, 因為我是四年級時到那裡上學, 然後從五年級到七年級我都在這個學校, 而我們全在同一間教室, 所以雖然你是五年級卻能學到七年級甚至八年級學的全部東西, 真是非常有幫助。我覺得這種學習概念非常好, 如今已沒有這樣的小學了。在我結束7年級的課程之後, 政府將這間學校關閉, 因為學校實在是太小了。於是我8年級就必須到比較大的鎮上的小學上課, 不過那還是一間小學校。我在那個鎮裡完成我的小學及中學教育。在我唸中學的時候, 我們又搬到父母親新買的一個農場去住, 可是在不同區。但我還是繼續在原來的中學上課, 因為我不想離開我的朋友。我每天必須走一段路去坐公車, 我不太記得有多遠, 也許是一英哩或是半英哩到1英哩之間吧, 因為我們住在不同的行政區域。

劉: 這段時間你們都一直在 Fresno 附近, 是嗎?

M: 是的, 在 Fresno 附近的小鄉村。這間中學很有趣。小學畢業的時候, 我們畢業班全部有 60 個學生, 而且我們全部都上這間中學。可是我畢業的時候, 我們就只剩 28 個學生。在 California, 法律規定我們只要上學到 16 歲, 16 歲之後如果你不想繼續上學的話, 可以辦退學。我不知道現在是不是還這樣。所以大部分的學生就退學了。很可惜的是, 在退學的學生裡面, 有些是蠻聰明的。

劉: 他們退學之後就到田裏去工作, 是嗎?

M: 是的, 大部分的人後來當工人或分擔家計。所以我們那間中學那一年就只有 28 個畢業生, 而我是 Valedictorian(代表畢業生致辭, 通常是第一名畢業生), 不過這實在不代表甚麼, 學校實在太小了。我的父母親他們沒有讀大學的經驗, 所以當我還在讀中學的時候, 我打算將來讀個社區學院或者州立學院就好, 沒有想過要讀大學。然而, 我有個老師, Toru Ikeda, 他是日裔美國人, 對我很感興趣。我想他是 U. C. Berkeley 的碩士。他鼓勵我去讀大學。所以我跟我最好的朋友, Carroll Jones, 兩個人就去 Berkeley 讀書。第一年的時候我們兩個住在一起。我唸工學院土木工程系。可是很快我就轉到機械系去了, 因為我實在是不喜歡土木工程的測量課程。我一直都對“飛行”很感興趣, 我想多學一點航空工程的學科, 所以我轉到機械系。對我來說, 從鄉下一間小小的中學畢業, 到這裡唸大學非常的辛苦。我不知道怎麼作筆記, 我甚至不知道怎麼讀書, 即使我在中學的時候讀的很好。很多基本的事情我都不會作, 所以

唸大學的前二年非常的難過。不過, 後來兩年就容易很多, 因為我已經學會該怎麼讀書。

劉: 你剛剛提到說在你中學畢業的時候, 你的父母並沒有考慮到你將來可能會去讀大學的事情, 那你的父母親在到 California 之前, 他們的背景是什麼呢?

M: 我父親在日本九州福岡市出生。他在 12 歲的時候來到美國。他一個已經移民美國的 uncle (舅舅, 叔叔, 伯伯?) 收養了他。所以, 基本上他是一個人到美國的, 是由一個叫 Ogami 的家族帶他過來的。我的外祖父母則是在我母親出生之前, 就已經移民美國了。我的母親在 Oakland, California 出生。所以我是我們家族在美國的第二又二分之一代; 既不算第二代, 也不算第三代。我父親的家族在九州福岡有一片農田, 一些稻米田。我不記得他們是否還擁有些甚麼其它的東西。他們家族的產業現在應該還在, 不過大部分不是已經賣掉, 就是已經變更成建築用地。我覺得很可惜, 我實在無法想像在日本他們怎麼會把好好的農地變更成建地呢?! 我外祖父母起初是移民到 Oakland, 但他們後來搬到 California 中部, 我想是因為我外祖母有健康上的問題, 所以他們必須搬到氣候較暖和的地方。就在這時候母親遇見父親, 之後他們就結婚了。

劉: 所以你父親他們在日本是農夫, 到美國之後還是務農?

M: 我父親的 uncle 原來在日本是農夫, 不過到美國之後, 除了經營農場之外, 還有從事其他的事業。他另外還開了一間旅舍, 一間商店, 還有一些其他的事業。不過我父親倒是一直都很喜歡經營農場。

劉：這在當時是典型日裔美國人的生活方式嗎？

M：在當時，是的，非常的典型。

劉：你剛提到你唸大學的情形。之後你在 Berkeley 一切就都很順利了？

M：後來就很順利了。不過我不確定我將來要做什麼。我並沒有長遠的計劃。好像大學畢業之後，下一步就是去唸研究所。而我並不知道我是不是該去唸研究所。所以我同時申請 Berkeley 機械系的碩士班，也同時在找工作。暑假的時候我在 Diego 的 Convair Astronautics 打工。在他們的溫度標準實驗室裡工作。那真是一份無聊的工作啊！當下我就決定我一定要回去唸研究所。這種工作實在是太糟了。

劉：後來成功的回去唸研究所了？

M：對，後來我回去 Berkeley 唸研究所。在當時我是個實驗學家。我當時對實驗流體力學及流體動力學很感興趣。我加入了稀薄氣體動力學的計劃，這在當時是很熱門的一個領域。我從事一個關於設計低密度高速風洞溫度探測儀的計劃。這計劃非常的有趣。雖然我從事的是實驗性質的工作，不過這在當時是非常困難的，主要是因為我們受限於當時所能使用的儀器。此外，我跟我的指導教授之間也有一些問題。我能感覺到我的指導教授是非常的聰明的，可是我實在捉不到他的脾氣。有時候我去找他，他會很客氣的跟我談；可是有時候他就會很不客氣的直接把我踢出他的辦公室。我實在很不喜歡這種不確定性。所以我決定博士班要去別的地方唸。那時候我申請了 Berkeley、Caltech、Princeton 及 Harvard。U.C.

Berkeley 及 Princeton 都願意提供我獎學金，而 Caltech 及 Harvard 則只是接受我的申請，給我的補助並沒有很多。所以我決定去 Princeton。我會申請 Princeton 還有另一個因素是源於當時一個剛到 Berkeley 的新老師，Chang-Lin Tien(田長霖)。

劉：這是那一年？

M：1961年。他當時是教我們 mathematical thermodynamics 課程的老師。我想那是他到 Berkeley 的第一年。他當時非常非常的年輕。他課教得非常好。我受他的啓發很多。後來我在考慮要在那裡唸研究所的時候，他告訴我“申請 Princeton!”，所以我就申請了 Princeton。我會申請 Harvard 是因為我指導教授是那裡畢業的；而我申請 Caltech 僅僅只是因為 Caltech 在 California。

劉：你總是很支持 California？

M：是的。而我在 Princeton 拿到了 Guggenheim 獎學金，這也是我會去 Princeton 的原因之一。

劉：Guggenheim現在已經不頒獎學金給研究生了，是嗎？

M：這是不同的 Guggenheim。我拿的是 Daniel Guggenheim，那是給研究生。另外還有一個是 John Simon Guggenheim，那是給教授的。在離開 Berkeley 之前，我結婚了。於是我們便開車去 Princeton。那裡的環境完全不一樣，學校很小，而且大部分的學術活動都是形而上的。還有就是在那裡你必須專注在你的工作上，而不是去學額外的東西。所以在那裡我又從重新開始我的實驗工作。我被分派到一個不適合學生去作的計劃——設計低密度高速氮氣風洞。

劉: 那是哪一個系?

M: 當時是叫航空與機械科學系 (Aerospace and Mechanical Sciences)。我想現在應該是叫機械航空工程系吧 (Mechanical and Aerospace Engineering)! 一到 Princeton, 我便開始作這個計劃。而同時在這裡也是我第一次接觸到來自不同國家的人。我研究室的第一個室友是從台灣來的, 他姓 Chiu, Chiu Huei-Huang。(他在 University of Illinois, Chicago 退休, 之後回台灣任職, 現在在台灣已經第二次退休。) 他會說日語, 實在讓我覺得非常的訝異。我本身不會說日語, 可是他會。他可能受過日據時代的教育吧。後來, 我在 Princeton 作了幾乎快兩年的實驗工作。我決定不再繼續作實驗, 我要轉行。我申請並且通過了資格考, 之後就轉去理論的工作。

劉: 可是還在同一個系, 是嗎?

M: 是的, 在同一個系裡面。在那個系裡面, 我想我大概跟氣體動力實驗室裡所有的教授都談過了! 我跟 Wally Hayes 工作了一陣子, 大概是兩個禮拜。然後是 Bogdanoff、Sin-I Cheng 及 Harvey Lam, 最後是我的指導教授: George Bienkowski。(Bienkowski 幾年後在 Princeton 一次詭異的腳踏車車禍中過世。) 他是 MIT 的博士, 在 Caltech 做博士後研究, 之後就到 Princeton。他非常的年輕, 年紀僅僅只比我大6個月而已, 非常的年輕。那個時候還有一個對我影響很深遠的同學, 叫 Young-Ping Pao。他跟我是同班同學, 比我早兩年畢業。他非常的聰明, 非常的敏銳。他畢業之

後在 Courant 的 Magneto-Fluid Dynamics Division 跟 Harold Grad 作博士後研究。後來又在別的地方作博士後, 不過最後他還是回去 Courant。很不幸的, 他後來死於胃癌。

劉: 你一直換指導教授是因為你...

M: 因為我想找適合一起作研究的人。我剛到 Princeton 的時候, 系上指派我跟 Hayes 一起研究。後來當我開始作實驗工作的時候, Bogdanoff 是最自然的人選。之後我放棄跟 Bogdanoff 的實驗工作並開始嘗試理論性的工作的那個暑假, 我跟 Sin-I Cheng 作三維的 wake flow。我之所以決定不再跟他一起工作是因為我實在是不了解他說的話。儘管他到美國已經有30年, 他的口音還是很重, 我很難聽懂他在說什麼。之後我去跟 Harvey Lam 一起工作。跟他一起工作也還不錯, 只是每次當我們設定了一個問題, 我不相信那是可行的。我不相信他的想法是對的。他想用動力理論 (kinetic theory) 作 boundary layer theory, 然後再用 Navier-Stokes 連續流體 (continuum flow) 理論讓流體流出去。問題是你怎麼把他們結合起來? 我們甚至不知道動力理論 (kinetic theory) 跟連續流體 (continuum flow) 理論之間如何連結。我們現在還不知道怎麼作, 是嗎?

劉: 即使是沒有邊界。

M: 對, 即使是沒有邊界。所以問題是我們如何把他們連起來。因此當 Bienkowski 到 Princeton 時, 對我剛好是一個機會, 我想該是換指導教授的時候, 我可以作我真正想做的問題。

M: 是什麼問題?

劉: 是關於在無限流體中旋轉圓柱體轉矩的問題。此外還有就是用動力學的方法作 Couette flow 的問題。這就是我論文的工作, 不是什麼太了不起的工作。在 Berkeley 我作了一年的實驗工作, 之後搬到 Princeton, 又花了一整年的時間去實驗, 因為其間有一些關連性。有了這一次很不好的碩士論文的經驗, 我決定在我的博士論文完成之前, 我不打算離開 Princeton, 所以我申請了博士後研究的工作。其中的一個就是 Plasma Physics Lab 的 Martin Kruskal 提供的。1965年的9月, 我獲得這個博士後研究的工作。這裡有一小段插曲; 一開始我申請的時候, 他們並打算要聘我, 他們要聘的人是 Ben Zinn(他現在在 Georgia Tech)。可是當時 Ben Zinn 同時也接到 Georgia Tech 的聘約, 所以他決定要去 Georgia Tech, 他放棄這個博士後的機會。因此他們才將這個工作給我。

劉: 能聘到你, Princeton 不知道有多幸運。

M: Well! 所以我一方面作我的論文, 另一方面我也去跟 Martin Kruskal 談。他說: “這裡有一些問題你可以跟我一起作。不過, 你白天不能作你的論文。在這個實驗室裡, 你必須作我的問題。如果你想作你的論文, 你只能利用晚上的時間。”於是接下來三、四個月, 我便是白天作他的問題, 晚上作我的論文。他給我的問題裡面, 我最喜歡的一個就是 Korteweg - de Vries, 我已經記不得其他的問題是什麼了。我覺得我應該可以在這

個問題上作一點事情。晚上的時間我還是繼續作我的論文, 同時也跟口試委員交換意見以修改我的論文。最後在1966年4月, 我終於通過口試獲得博士學位。而白天 Kruskal 則要我作 Korteweg-de Vries。開始的時候, 是他先告訴我, 他們已經進行到什麼地步。然後, 他給我的工作則是他有關於 Korteweg-de Vries 守恆律\* (conservation law) 的一些想法。我想他會給我這個問題是因為他可以不用跟我一起工作, 因為他正忙於準備去俄國, 他正在學俄文, 他不想被打擾。所以他給我 Korteweg-de Vries equation 這個問題。當時他們已經知道這個方程有5個守恆律; 前兩個很明顯, 基本上是質量守恆跟動量守恆。第三個我想是 Korteweg 跟 de Vries 找到的, 可能更早吧。Whitham 找到第四個, Kruskal跟 Zabusky 找到第五個。然後他們嘗試找第六個, 一直沒有成功。Kruskal的想法就是: 也許我們該跳過一個, 直接找第七個; 也許根本就沒有第六個, 但是卻有第七個。他告訴我: “找找看有沒有第七個。”結果我真的找到了!

劉: 你花了多久的時間去找?

M: 沒有很久。只是計算上很複雜, 因為每一項都必須很仔細的算出來, 而且每一項之前的係數都很長。我找到第七個, 我回頭看看他們之前關於第六個守恆律的工作, 我發現他們有一個計算上的錯誤, 所以事實上第六個也是存在的。於是我想, 也許我該繼續往下算, 後來我徒手把第八個跟第九個都算出來。

劉: 他們花了多久的時間算第六個?

---

\* 見文後補充

M: 我想他們並沒有花很多時間在這上頭。他們應該嘗試去算過, 只是算不出來。所以他們認為第六個根本不存在。

劉: 更早之前 Whitham 是不是也試著去算過第六個?

M: 這我不知道。我想應該是沒有。我不認為 Whitham 有很認真的在研究 Korteweg-de Vries equation, 他卻能找到第四個。不過他並沒有繼續算第五個。算出這幾個新的守恆律之後, Kruskal 跟我相信這個方程式一定有無限個守恆律。關於 Kruskal, 我在當研究生的時候, 曾經修過他開的兩門課。我發現上他課的學生總是被他搞得暈頭轉向。他會在他想要解釋的理論的過程中, 加入很多很多的註解, 所以除非你已經知道他要作什麼, 否則實在很難順著他的邏輯作思考。然而, 一對一跟他一起工作就完全不一樣了。那實在是非常的棒, 非常的好。我可以問他任何很瘋狂甚至是很笨的問題, 而他也總是很樂意回答我所有的問題。我非常喜歡跟他一起工作。跟他一起工作的這段時間, 大概是我個人的研究生涯裡最令人興奮的時期吧! 那時候我每天大概都一早就去工作, 而 Kruskal 則是下午3,4點才來。然後我們會一起工作到6,7點, 之後我就回家, 而他則繼續工作到很晚才回家。這期間有一個很有趣的故事: 有個在 Plasma Physics Lab 作 computing center problem 的傢伙想跟 Kruskal 討論問題。他問 Kruskal 說: “我這個地方有點問題, 想跟你討論。能跟你談談嗎?” Kruskal 說: “好呀! 約個時間談談。早上1點可以嗎?” 於是早上1點他們在

Kruskal 住的地方討論了大約一個小時。那時差不多是早上2點, 那個傢伙想說他該離開了吧?! 就在他準備要走的時候, 他看到有一個研究生在門口等2點的 meeting。這是真實的故事。

劉: 我知道你發現一個非線性 Riccati 型的轉換, 是嗎?

M: 是的, 不過時間上要稍微晚一點。

劉: 所以前面的幾個守恆律都是硬算出來的?

M: 沒錯, 是硬算出來的。那時我們都猜測這個方程應該有無限個守恆律, 並且我們開始試著去證明。可我們證不出來。我畫了一個很大的表格, 把這些守恆的密度 (density) 跟通量 (flux) 都填上去, 我看著那張表格, 好像是算命的人在看命盤, 試著找出他們之間的關係。我把這張表格拿給我的一個朋友叫 Dave Wiley 看 (他當時也是博士後研究員; 他是物理學家 Goldberger 的學生。Goldberger 後來當上 Caltech 的校長)。我們一起試圖將表格裡的物理量之間的關係找出來。有一天, 他在看牙醫的時候突然想到一個很不錯的想法。他的作法就是: 如果你將其中一個守恆的密度 (density) 作 functional derivative, 就會導出之前的那個守恆密度; 所以你如果知道上面的那個, 你就可以算下來, 可是卻導不回去。這就是問題的所在。這是他作出來一個很好的小結果, 他看出來這之間的關係。之後在1966年夏天, 那時 Kruskal 已經從俄國回來, Kruskal 跟 Zabusky 在慕尼黑的 Max Planck Institute 舉辦數學與物理非線性研討會。我參加

了那個研討會，那是我第一次參加研討會。我在那個研討會遇到 Zabusky，可能在更早之前就遇到他了吧，我跟他不是很熟。我把我算出來的這些守恆律給他看，他告訴我：“你知道 Fermi-Pasta-Ulam problem 嗎？這些東西是從那個問題導出來的。關於這個問題還有另一個方程，不是只有 Korteweg-de Vries。” Kruskal 跟 Zabusky 他們之前還導出另一個關於 Fermi-Pasta-Ulam problem 的方程，那個方程有不一樣的非線性項。

劉：是因為不同的 scaling 嗎？

M：不，是不同的 force term，較高次的 force term。他說：“那個方程是 modified Korteweg-de Vries 方程，非線性項是  $u^2 u_x$ ， $u$  平方，而不是  $uu_x$ 。也許這個方程會有比較多的守恆律吧？”於是我就開始在 Max Plank 那個小小的圖書館裡面算這個方程的守恆律。結果我發現這方程的確有很多守恆律，算都算不完。後來我想說不定我把它改成  $u^p u_x$  ( $p$  是任意整數)，也會有很多守恆律。結果沒有。只有  $p = 1, 2$  的時候我可以算很多守恆律， $p$  大於等於 3 以上我就只能算出 3 個。我後來的那個轉換就從這個特殊的例子得出來的。不過我們待會再談這個。我現在回頭談談那個非線性研討會。我們還在研討會場的時候，Peter Lax 走過來跟我們說：“Cathleen Morawetz 跟 Peter Unger 他們已經證明 Korteweg-de Vries 方程只有 9 個守恆律。”那剛好是我算出來守恆律的個數。我說：“我不相信！”他說他們已經證明出來守恆律只有 9 個。他手邊現在沒有他們的證明。我一直沒有看過他們的證明，我跟 Cathleen 要了好幾次，他一直沒有給我，所以我不

知道他們到底發現什麼。我知道的只是 Peter 說“只有 9 個”，而 Cathleen 說“這裡頭有些不尋常的情形，所以只有 9 個”。所以當我在慕尼黑聽到這個結果之後...

劉：所以 Morawetz 他們知道你算出來的那些守恆律？

M：他們知道這 9 個守恆律。從慕尼黑回來之後，我就直接去加拿大渡假。這倒是一個跟加拿大很有趣的關連。我有個作數學物理的朋友，我們從當研究生時代開始就一直是很好的朋友，我跟他一起去他父母親在 Peterborough Ontario 的小木屋渡假。兩個禮拜的時間，基本上，我算出了第 10 個，第 10 個很長。我不停的犯一些計算上的小錯誤，不過我還是算出來了。我檢查過很多遍，我確定沒有任何計算上的錯誤。那時我就更相信應該要有無限個守恆律。我跟 Kruskal 便開始作這個問題。我們後來用 WKB 方法作出來了。那時候我們就坐在他的研究室，時間大約是下午 6、7 點，我們坐在他的研究室裡面，眼睛看著黑板，正在欣賞我們作出來的結果。這時候電話響了，Cliff Gardner 打電話來說：“我剛剛想出來要怎麼算出那無限多個守恆律！”我們才剛剛在黑板上證明出來而已！他的方法跟我們的不同，但是比我們的好。他的方法很漂亮，基本上有點像是生成函數 (generating function)。

劉：Cliff Gardner 是從那裡來的？他好像一直都很關心你們的計劃。

M：Cliff Gardner 是 Plasma Physics Lab 的研究員。他研究室在我隔壁。他研究室蠻小的。原先他在一間比較大的研究室，我不知道他為什麼要換成一間比較小的。



Kruskal 去俄國之前跟我說，如果我有任何關於守恆律的問題，可以去問 Cliff Gardner。那時我根本就不認識他。所以當我第一次有關於守恆律的問題的時候，我就去 Cliff Gardner 的研究室。我敲了門之後走進去，我跟他說：“Martin Kruskal 告訴我，如果我有任何關於守恆律的問題，可以來問你。”他說：“我對守恆律一竅不通。”

劉：這是在你算出第7個守恆律之前嗎？

M：不，之後，是在 Kruskal 離開之後。Kruskal 是在1966年1月去俄國的。這是我第一次跟 Cliff Gardner 打交道。他是很厲害的傢伙，很聰明。他大概是我遇過最聰明的人。我的意思是說 Kruskal 也很聰明，不過是不同的類型。Gardner看事情的角度相當與眾不同，非常有趣。他總是導出各種不同的結果，他也教了我一些很有趣的事情。我問他說：“你是怎麼導出這些結果的？”他說：“Well, 我試過的東西有百分之95, 也許是百分之99吧，最後都會被丟到垃圾桶！”所以事實上他試過所有的情形，最後才導出那些結果。

劉：回頭談談你們關於無限多個守恆律的部分好嗎？我的意思是說，你們是不是有什麼特別的理解或是什麼特殊的想法讓你們堅信一定有無限多個守恆律？

M：沒有什麼理由，只是一種信念，只是相信應該要有無限多個。這也是為什麼當 Peter Lax 跟我們說只有9個的時候，我很難相信這些守恆律會突然停在第9個。

劉：所以你當時並不屈服於權威，是嗎？你只是相信你看到的。

M：也許吧?! 我想他只是描述別人應該已經證明出來的結果吧!

劉：可是他沒有反駁你們的猜想？

M：他沒有反駁。但是我想他相信 Cathleen Morawetz 跟 Peter Ungar 的結果，只有9個。我想這是他會向其他人宣傳的原因，他相信那個答案。

劉：他從來沒有考慮過只有9個應該是錯的？

M：我想他沒考慮過。我心裡一直有一種信念就是：如果我自己不能證明的話，我無法確定的相信那會是對的。

劉：我想有許多人會認為孤立子理論 (soliton theory) 是數學在20世紀最重要的發現。你們當時並沒有相信其他任何人的預設立場、猜測等等的。這是非常關鍵的一部分。

M：至於整個有關孤立子 (soliton) 的想法，那是 Zabusky 跟 Kruskal 的想法。這也是一個很有趣的故事。

劉：這可以追溯到 Fermi 跟 Ulam 是嗎？

M：是的。事情是這樣子的，Kruskal 跟 Zabusky 之所以會去作 Fermi-Pasta-Ulam problem, 是因為當 Zabusky 還在 Princeton 的 Physics lab 跟 Kruskal 作博士後的時候，他們讀了一本 Ulam 寫的書，書裡面收集了一些數學物理的問題。其中有一個就是 Fermi-Pasta-Ulam problem。而 Zabusky, 我不是很清楚他的背景是什麼，不過他知道 hodograph transformation。事實上，他在這個方程上發展了很

多理論。而 Korteweg-de Vries 就是他們試圖對 Boussinesq equation 的雙向傳遞波作較簡單描述時，所導出來的結果。他們先研究單向傳遞波，那就會導出 Korteweg-de Vries equation。導出這個方程之後，他們又作了很多工作。其中一部分是這個問題的數值工作。然後他們回頭看了 Fermi-Pasta-Ulam 之前的工作，他們發現有一件事 Fermi-Pasta-Ulam 他們沒有作，就是他們只研究這個 PDE 的能量 (energy) 跟 Fermi-Pasta-Ulam string，這就是為什麼他們錯過了這個現象。他們發現了能量的再歸性。如果你將全部的能量都放在這個非線性 string 的其中一階，則那一階的能量會崩到其他較高階，然後再回到原來那一階，這就是能量的再歸性。那時我還有一個問題就是到底那個才是真正的問題。我的意思是：當我跟 Ulam 談的時候，他告訴我他考慮的是 PDE；可是當我跟 Pasta 談的時候，他卻告訴我他從來不考慮 PDE，他考慮的是離散的問題。所以這個地方他們有點意見。我不知道誰才是對的。也許他們都是對的，只是從不同的角度看問題而已。可是 Pasta 很肯定的告訴我，他們考慮的不是 PDE，是離散的問題。這看你要怎麼想問題，是要把解分段，或是考慮離散系統，它們之間差別很大。

劉：我知道 Fermi 對數值解感到非常的訝異。

M：是的，我不確定他是不是就是第一個提出要作數值解的人。這個問題也是他們用在 Los Alamos 的第一台電腦如何在不同階

分佈而且可以均勻的分佈解非線性問題其中的一個。他們想要了解能量。

劉：不過實際上他們沒有做到，對嗎？

M：沒有，事實上他們一直都沒有畫到描述這個現象的解。他們一直沒有畫出真正的解。所有他們畫出來的就只有 Fourier mode。他們完全錯過了兩個波相互穿越的這個現象。

劉：他們只知道這個地方有點不尋常？

M：是的。

劉：可是是誰有很清楚的概念知道那就是孤立子\*(soliton) 呢？

M：那是 Kruskal 跟 Zabusky 作的。他們把這個結果發表在 Physical Review Letter。那篇文章的內容是他們把 Fermi-Pasta-Ulam 問題倒過來作。一般從數值分析的角度來說，我們都是將一個連續的方程離散化，然後解離散的方程。他們的想法則是，現在有一個離散的方程，那原來的 PDE 是什麼呢？你只要將 Taylor 級數逐項算出來，那接下來的問題就是還需要那些額外的項使得這成爲一個可解的問題。這就是他們的作法，而他們導出來的方程基本上像是一個 Boussinesq equation。可事實上如果你只讓波向一個方向傳遞的話，那就是 Korteweg-de Vries。所以他們在 Physical Review Letter 的那篇文章就闡述了 soliton 的概念。唯一不同的是他們那篇文章的結果是考慮有限週期的區間，所以雖然可以看到這個現象，但並不是很完美。

---

\* 請參考數學傳播第十八卷第三期 林琦焜「孤立子淺談」

劉：這真是令人興奮的故事。我想我們可以換個主題。在那之後你就去 Courant 是嗎？

M：我去 Courant 之前還有很多事情發生，先讓我多談一點這時候的事情。所以現在我們已經找到有無限個守恆律。我記不得究竟我們是先找到有無限個守恆律，還是我先找到 Korteweg-de Vries 跟 modified Korteweg-de Vries 之間的轉換\*。

劉：不過關於非線性轉換的論文發表的比關於無限個守恆律的論文來的早，是嗎？

M：是的。我已經不記得先後次序是怎樣的了。有可能是跟發表的先後次序一樣，我不是很確定。當時的情形是這樣的：我猜測 Korteweg-de Vries 有無限個守恆律，而 modified Korteweg-de Vries 也有無限個守恆律。而其他的  $p$  (i.e.  $p > 2$ ) 只有有限個。於是我當時就下了個猜測，現在想起來當時的那個想法真是有點傻，我猜測：既然 Korteweg-de Vries 跟 modified Korteweg-de Vries 都有無限個守恆律，所以這兩個方程的解之間可能有某種關係將他們連起來。實在沒有理由讓人相信這會是對的，不過我當時的確是這麼猜的，很天真的想法。所以接下來的問題就是，如果這是對的，那我要怎樣把這之間的關係找出來呢？一開始的時候我想這是一個很難的問題，而我當時所能作的就是先將這兩個方程的守恆律先對應起來，這麼作一定是對的。所以我想先照他們次序對應起來。

劉：你已經知道是那些守恆律了。

M：可是不行，因為維度 (dimensionality) 不對。所以我想也許要跳過幾個吧，結果就成功了。唯一麻煩的地方是，這個轉換是複數的 (complex)，它包含複數的係數。我不知道為什麼會出現複數。所以我作的第一件事就是拿去隔壁給 Cliff Gardner 看。他說：“我不知道這個轉換是不是會成功，證給我看。”所以，當場我必須要證給他看。我必須要把整個過程算給他看，我之前並沒有仔細算過，我只是這麼猜而已。我算給他看，如果把解微分之後再代入 Korteweg-de Vries，就會導出另一個。結果真的成功了，非常不可思議，真的成功了。然後我跑去告訴 Kruskal 這個結果。他那時候正在跟一個叫 Joe Su (現為 Brown 教授的蘇兆星) 的學生討論問題 (這件事我記得非常清楚)，然後我進去把這個結果給他看。他立刻停止他跟 Joe Su 的討論，轉過來跟我討論這個問題。我給他看這個轉換的方法，真是令人興奮，非常令人興奮的時刻。所以這是關於那個轉換的故事。這個轉換還有一個問題就是：它將一個我們原來不會解的非線性方程，轉換成另一個非線性方程，可是還是不會解。所以那有什麼好處。後來我想可能是 Kruskal 吧，他說這個方程可以線性化。這個方程是 Bernoulli 型的，所以它可以線性化。之後的方程看起來有點像是 Schrödinger equation，可是沒有 eigenvalue 在裡面。如果要算 eigenvalue 的話，經過 Galilean 轉換，方程中會算出一個常數，那就是 eigenvalue。可是這個方程很不尋常。首先，它有複係數的問題。不過

---

\* 見文後補充

你可以把這個複數消掉，只要將 Korteweg-de Vries 跟 modified Korteweg-de Vries 都變號就好了。這樣就將方程的 “ $i$ ” 給丟掉，然後用 Bernoulli 型方程的標準方法將方程線性化，然後再用 Galilean 轉換，最後得到一個與時間無關的 Schrödinger equation。之後我們得到的是一個關於固有值的問題 (eigenvalue problem)。可是我們處理的是逆散射問題 (inverse scattering problem)，因為我們已經知道係數 (coefficient)，知道位能 (potential)。我們不知道該怎麼作。接下來發生的事跟我們研究室的位置有點關係，非常有趣。在我們所有人的研究室中間有個共同的區域，那裡有個大黑板，那個黑板比 Kruskal 的研究室還大。Kruskal 跟我常常坐在那裡討論問題，其他人回去研究室前都會先經過我們。當時 Kruskal 跟我就坐在那裡作這個問題，剛好有個人經過我們要回去他的研究室，他看了一下我們的問題，他說：“你們要解的其實是一個逆散射問題\* (inverse scattering problem)。” 那個人就是 John Greene。他受的是核子物理的訓練，所以他知道逆散射問題。他在 Landau-Lifshitz 書上找到這個方程的一個精確解。我記得他拿給我看，後來我解出了這個方程的雙曲正割解 (hyperbolic secant solution)。之後 Cliff Gardner 走過來看了一下，他沒說什麼就直接到圖書館去找了篇 Kay 跟 Moses 在 Courant 寫的研究報告。據我所知這篇報告沒有發表過，可是他記得有這篇報告，而那篇報告討論的就是關於這個逆

散射問題在雙邊無限直線上的解。古典的問題討論的是在單邊無限直線上的解，而 Kay 跟 Moses 他們討論的正是雙邊無限直線上的解。所以到這裡我們終於憬悟可以利用逆散射理論 (inverse scattering theory) 來發展這整個理論。不過我們還有很多問題要解決，因為我們要解的問題，位能 (potential) 有起始條件。然後我們想知道，隨著 Korteweg-de Vries 方程的演進，位能 (potential) 是怎麼演變的。還有就是如果位能 (potential) 隨著 Korteweg-de Vries，那固有值 (eigenvalues) 是怎麼演變的，以及波函數 (wave function) 是怎麼演變等等的問題。這些大部份都是 Greene 完成的，因為基於某種原因，他知道怎樣作這些量的計算。劉：所以到此你們一共就只有4個人？

M: 就我們4個人。我們4個都在做這個問題，然後每天我們都會有新的結果出來，非常不可思議。每天都會有新的事物被發現，非常令人振奮，極度振奮。

劉：我曾經看過有人對這件事下了些評論，很多人都覺得很不可思議，這麼重要的一個改革居然是由你們這麼小的一群人完成的，而且你們這些人都在同一個地方。

M: 是的，我想是我們聯手完成的。Kruskal、我、Gardner 跟 Greene，我們都在這整個問題上作了主要的貢獻。我們把所有的工作、所有的細節都仔細的完成。真是非常的不可思議。

劉：可你是最早有關於無限多個守恆律及非線性轉換想法的人，而這是所有想法的

---

\* 見文後補充

開始。我想你對這段時期一定有非常的深刻而美好的記憶。

M: 是的, 整個我在作博士後的那兩年。

劉: 你是說你剛剛說的整個故事的過程, 只有兩年的時間?

M: 是的。事實上比這更多, 因為大部份的論文都是我還在 Princeton 的時候寫的。雖然當時有些結果都非常的有趣, 但是我們並沒有發表, 因為那時候我們都沒有發表論文的壓力。然而對於剛開始從事研究生涯的我來說並不好, 因為後來在我的研究工作裡, 我會覺得不需要很快發表論文。可是當我覺得我要開始寫論文的時候, 我發現很多工作別人已經完成, 雖然並不都是同一個人的結果, 可是還是被人家先發表了。我們當時還有一些我認為非常好的結果, 就是: 固有函數 (eigenfunction) 的平方會有滿足一個非常好的方程式。然後你就可以寫下固有值和 (sum of the eigenvalues) 的公式。我想這是非常好的結果, 可是卻沒有人注意。我想在我們的那篇論文還有一些工作可以作, 不過卻沒有人注意。所以所有關於逆散射理論的這些工作, 都是我在去 Courant 之前完成的。之後我就去 Courant, 我事實上在1967年7、8月的時候搬去 Greenwich Village 住。第一個月我還是通勤回 Princeton 工作。然後我才開始正式在 Courant 工作。那時候 Peter Lax 一整個夏天都在 Stanford 跟 Ralph Phillips 工作。他們在作古典散射理論 (classical scattering theory), 不是量子散射理論 (quantum mechanical scattering theory)。我到 Courant 之後, 我就去

Peter Lax 的研究室, 我跟他說: “我想把我們暑假得到的一些結果給你看, 不過你可能已經知道了。” 然後我就解釋了我們的逆散射理論給他聽。他告訴我他從來沒有考慮過這種作法。這讓我感覺很好。不過事實上在這之前, 他曾經到過 Princeton, 我想那是我第一次見到他。他在 Princeton 證明給我們看兩個 soliton 怎樣彼此穿越。他曾把這個結果寫成論文, 那篇論文的結果就是如果你讓兩個 solitary wave 彼此穿越, 那穿越之後它們都沒有改變。這是一篇非常好的論文。他給了我一份 preprint。我非常仔細的檢查了每一個細節。結果我發現了論文裡面有一大堆計算錯誤, 可是結果都是對的。我想大概是“負負得正”的關係吧?!

劉: 他可能很趕吧!

M: 也許吧! 但是我相信他一定有仔細的算過, 只是他在寫論文的時候已經不記得所有的細節, 但是他知道答案是什麼。之後我就把這些錯誤, 還有訂正的結果都寫信寄給他, 他後來正式的論文也就都有改過來。我的那一份只是 preprint。

劉: Lax pair\* 也在那篇論文裡面嗎?

M: 那就是 Lax pair, 雖然 Lax pair 並不在這篇論文裡面, 是在另一篇相關的論文裡。我當時花了蠻大的力氣去理解什麼是 Lax pair, 因為我並不是很懂 Poisson bracket。他是一個很聰明的人。

劉: 我們可以談談你是如何開始你在生物數學 (mathematical biology) 的工作嗎?

M: 當然可以。我在 Courant 的時候還是繼續作 Korteweg-de Vries, 同時也還作

---

\* 見文後補充

一些 plasma physics 的問題,不過主要還是 Korteweg-de Vries。我在 Courant 待了4年,之後我就去 Vanderbilt 的 Vanderbilt University,我當時正在寫關於 Korteweg-de Vries 的概論的文章。有一次我在 Washington Square College 教微積分的時候,有一個生物系的教授來上我的課。下課之後他走過來跟我談,我跟他說:“你怎麼會在這裡上課呢?”他說當他還是學生的時候,他曾經修過微積分,不過現在他大概全都忘光了,但是他現在發現沒有微積分,他連論文都沒有辦法看的懂。所以他現在才又重新開始學微積分。我跟他說:“那很好啊!”然後他帶我去參觀他們的實驗室。他主要的研究是關於細胞週期 (cell-cycle) 的現象。我想那很有趣,可是我對生物模型一竅不通。我還在 Courant 的時候,那裡也有一群人, Frank Hoppensteadt 等,在作 population dynamics。那也很有趣,不過我當時並不想從事那個領域的工作。之後我就在 Vanderbilt。那時候開始有越來越多純數學領域的人進來作逆散射理論這個領域的研究。這方面的研究漸漸的就走到代數幾何的方向,但是我對代數幾何一點也不懂。所以那時候我就搬到 British Columbia 去。我在那裡作了一年的訪問學者,那一年剛好遇到 Don Ludwig 舉辦的生態學的研討會。

劉:他就是跟 Joe Keller 一起發表論文的人?

M: 是的。Courant-Hilbert 第二冊有很大一部分是他寫的。他在之前一年才剛到 British Columbia。我到的那年暑假他正舉

辦一個生態學的研討會。我是在那時候決定我要換領域的。我還在 Vanderbilt 的時候跟兩個學解剖的人談了很多關於生理學的知識,他們主修神經生理學,所以我跟他們學了一點關於神經生理學的知識。這是一個很困難,分門很細的學門。後來我到了 British Columbia 之後,我決定花一年的時間來學生態學 (ecology)。我參加了很多生態學的討論會及學術活動。之後我發現他們的資料不足。所以他們在造模型的時候,就只是造模型,他們不管資料。我覺得他們好像是憑空湊出來的,我的意思是說模型背後應該有許多理由。我看不出來他們這樣造出來的模型會跟生物學有關。所以我決定與其作這個,還不如作關於腦部的研究。至於我會想作腦部研究的原因是:有一次我給了一個關於 soliton 的演講,演講結束之後有一個年輕的博士後走過來跟我談。他叫 Henry Tuckwell, 芝加哥大學畢業,生物物理 (biophysics) 的博士。他在芝加哥跟 Jack Cowan 作了一陣子, Jack Cowan 是非常出名的生物學家。我想他正式的指導教授是 Luigi Ricciardi (義大利人,曾經在芝加哥待了一陣子,後來回義大利去)。我在那場演講裡面談到了關於兩個波如何相互穿越的問題。結束之後 Henry Tuckwell 問我:“你談到關於資訊的保存。你覺得這個理論跟記憶有關嗎?”我說:“我不這麼認為,因為 soliton 只在保守系統 (conservative system) 才會產生,可是腦部是一個耗散系統 (dissipative system)。”我們大概就只談到這裡。

劉:腦為什麼是耗散系統 (dissipative system) 呢?

M: 因為腦裡面有很多的能量的機轉, 我猜我應該還算知道一點 Hodgkin-Huxley 吧, 而且那些機轉的方程是屬於反應擴散方程 (reaction-diffusion), 所以腦並不是保守系統 (conservative system)。之後 Henry Tuckwell 就會經常在我的信箱裡放一些關於腦部的論文。當時我並沒有去注意那些論文, 只是放在一邊。直到有一天, Henry Tuckwell 在我的信箱裡放了一篇論文, 那篇論文有 target pattern。我忘了是 Nancy Kopell 還是 Lou Howard 的演講裡討論的那個反應擴散 (reaction-diffusion) 方程也有 target pattern。當時我想: “這可能是相同的現象?!” 於是我把 Henry Tuckwell 叫住, 我跟他說: “也許這個跟反應擴散系統 (reaction-diffusion system) 有點關係。” 於是我們兩個便開始作這個問題, 我們提出了一個模型, 也就是反應擴散模型 (reaction-diffusion model)。這個問題困難的地方是, 我們以為那是電的現象。我稍微解釋一下這個問題: 1944年的時候, 有個巴西的生理學家, 他在哈佛大學唸博士班的時候, 研究關於貓的癲癇的問題。他們的實驗就是刺激貓的腦, 然後就可以觀察到一個癲癇波很快速的傳遞過去。可是癲癇波的後面還跟了一個傳遞速度很慢的波。那個波的波速非常的慢, 大約是每分鐘1到10mm 之間。所以當我們決定研究這現象的模型的時候, 我們從電學的觀點出發, 結果我們發現所有我們導出來的波的速度都太快。後來我們想這一定是化學反應的現象, 所以我們就從化學反應的觀點來研究, 結果我們導出來的模型裡面, 波

傳遞的速度大約只有每分鐘1mm。所以我們就得到這個合理的模型, 還有一些關於腦部機轉的猜想, 這些結果在之前的文獻上從來沒有出現過。這個現象在1944年的時候被發現, 之後全世界有很多人都在研究這個現象, 可是一直都沒有真正比較好的想法可以解釋。我們覺得我們的模型某種程度上可以解釋這個現象。一直到現在都還有人在研究這個問題。

劉: 你們在推導模型的時候, 你跟你的研究伙伴對化學反應都必須要有相當的了解?

M: 是的。我們造那個模型的方法是基於我在 plasma physics 學到的一個手法。Plasma physics 有個模型叫雙袋模型 (two-bag model), 基本上是將電子跟質子分開討論, 雖然他們佔有相同的空間, 可是還是被分開處理。

劉: 你已經有數學背景, 可是你其他的那些背景也都很重要是嗎?

M: 是的。你必須要懂得一些科學。我想如果你要造模型的話, 你就必須要懂得一些科學。關於這個我自己覺得有點自相矛盾, 因為我們上課教學生造模型的方法, 可是我不覺得上這種課有用。我覺得學造模型最好的方法就是直接去上物理或化學之類的課程。直接去學他們是怎麼作的。我自己還有一些工科的背景, 這對我非常有幫助, 因為我學了很多別人造模型的方法。所以當我自己開始造模型的時候, 我知道該怎麼開始, 我知道有那些步驟要作。最重要的是你必須懂得那些問題的背景, 你必須懂科學。

劉: 所以你認為數學系的學生如果要學科學的話, 就應該直接到相關的系去修課; 相

反的，其他系的學生要學數學就應該要到數學系上課？

M: 對，沒錯。我大部分的研究生剛來的時候對生物是完全不懂的，所以我都會要求他們去上一門跟細胞生物學有關的課，像是解剖學、動物學、生理學之類的都可以，上完之後他們就會有基本的背景知識。事實上我有些學生不僅只是去上課而已，他們還在實驗室作生物實驗，他們也學了一些實驗室的工作。他們原來都是學數學出身的。

劉: 你有學生不是學數學的，而是主修生物的嗎？

M: 有的。不過我覺得數學系畢業的學生學生物要比生物系畢業的學數學來的容易。我比較喜歡我的學生是數學系畢業的，然後要他們去學生物，而不是反過來。

劉: 在你的研究生涯裡，你換了幾次不同的方向作研究，而其中一個很特別的特質就是你從來不怕跟其他領域的人談。你從找論文指導教授開始就是這樣？

M: 有一件事我必須要說，當我還是 Berkeley 的學生的時候，我很不喜歡工學院的一些教授，他們非常的沒有耐性。你不能問他們很多問題，然後期望他們給你一個合理的答案。他們會認為你什麼都不懂，瞧不起你，然後隨便講一講敷衍了事。但是 Princeton 的人不同，他們不會。可是後來我遇到的人越來越數學，我發現這種情況卻越來越少。比方說，Kruskal 就是非常好的一個人。我非常喜歡跟他一起工作，其中有一個原因就是我可以問他任何的問題，而他都會很認真的回答我。

劉: 因為你的問題都不會很笨？

M: 不，不，我常常問他很笨的問題。我認為問笨問題是很重要的，因為我想很多人對事情的了解，常常只是基於自己專長領域的常識，僅只是知道而已。他們“相信”是對的，他們不知道為什麼是對的，只是相信。所以如果你要他們解釋為什麼是“對的”的時候，他們可能解釋不出來。所以我想問笨問題反而是好事。最糟的是：沒有笨問題，卻有笨答案！

劉: 好，再次謝謝你接受我們的訪談。我們聽了一段極精彩的故事。

後記： 訪談結束，在稍後的餐敘中 Miura 教授提及關於 soliton 一詞的起源。Soliton 被發現的時候，原本是要命名為 solitron，像電子被命名為 electron 一樣。可是 Solitron 已經被某間公司註冊，所以之後便稱為 soliton。

補充說明：(李志豪—中央研究院數學所研究員)

Miura 變換：如果  $v = v(x, t)$  滿足 modified Korteweg de Vries (KdV) 方程  $v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$ 。令  $u = v^2 + v_x$ ，則  $u$  滿足 KdV 方程  $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ 。這種由  $v$  到  $u$  之變換叫 Miura 變換。

守恆律：如果  $u$  滿足 KdV 方程，可觀察出  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$  此量與時間  $t$  無關，

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t dx = \int_{-\infty}^{\infty} (6uu_x - u_{xxx}) dx \end{aligned}$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} (3u^2 - u_{xx})_x dx$$

$$= 0 \text{ (由微積分根本定理)}。$$

KdV 有無限多守恆律  $\int T_n$ ,  $T_1 = u$ ,  $T_2 = u^2$ ,  $T_3 = u^3 + \frac{1}{2}u_x^2$ ,  $T_4 = 5u^4 + 10uu_x + u_{xx}^2$ , 等等。

Lax pair: 令  $H$  為有限維之內積向量空間,  $L(t)$  為異一個參數之算子與  $L(0)$  有 unitary 等價關係, 即

$$U^*(t)L(t)U(t) = L(0), \quad U(t)U^*(t) = I.$$

假設  $U(t) = e^{tM}$ ,  $M^* = -M$  (這裡  $M$  指  $M$  之隅伴算子, 即  $\langle Mu, v \rangle = \langle u, M^*v \rangle$ , 其中  $\langle, \rangle$  為  $H$  上之內積)。由上述條件,  $L_t = [M, L]$ , 這式子即稱 Lax pair。在 KdV 的情形, 所需之空間為無限維之 Hilbert 空間。  $L = -d^2/dx^2 + u(x, t)$ ,  $u$  為 KdV 之解。

逆散射變換: KdV 用逆散射變換來解之首篇論文為 C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura (1967), *Methods for Solving the Korteweg - de Vries equations*, Phys. Rev. Lett. 19, p.1095-1097. 在此次訪談中, Miura 教授有提及他與合作者如何找到解決問題之 key。

介紹 Soliton 的書: 現在有關 Soliton (孤立子) 的書不少, 有興趣之讀者可先參考下列入門書:

P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons an Introduction*. Cambridge University Press, 1989.

—本文訪問者劉太平為中央研究院數學所所長, 王太和時任中央研究院數學所博士後研究員—