

# 百年來的美國數學

石厚高

本文推介「百年來的美國數學」(A CENTURY IN MATHEMATICS— through the eyes of the monthly)

JOHN H. EWING 把「美國數學月刊」(American Mathematical Monthly) 自 1894 年創刊至 1993 年作了選輯。百年共有 1200 期，當然是大工程，所以他表示所選不是月刊“最好”(best) 的，因為很多最好的都太長了；選得少了不行，選太多了又成了鉅著，人人讚美可就沒人看。所以他要每篇都是在講個故事，而不一定是自發行以來最佳篇章。

選出來的常是短而有趣，而不因為它是那個時代最重要的數學；有些文章作了摘錄是爲了省篇幅。從雜誌立場來回顧歷史是有些偏頗而不完整的，好像看日記就要了解一個人似的，不過有這麼一本專輯應該是數學界盛事，可以瞭解很多真像。

這是談數學的書，有關教學與研究、應用數學與純數學、名大學與社區大學，瀏覽一下讀者會發現數學的流行 (fashion) 有那些改變；那些沒有變——我們對教學的關注，對學生的抱怨，唉！一年不如不年。

它也是歷史樣本書，要細加品味而不是研究。百年來「美國數學月刊」有偉大數學家的作品，也有學生或中西部小學院教師作品，他們的大名鮮有所聞。此書給了我們矇矓的兩個世界，它講故事而不是歷史的細節。它是過去一世紀美國數學的故事，給讀者極好機會去瀏覽百卷大書而不用真的去讀它們。它逐年、十年作數學取樣，讓讀者能感受到世紀交替之際，數學圈裡教師與研究者的分際。也能讀到 1920 年代學校爲刪除數學課程內容的掙扎、有關愛因斯坦及其相對論的爭辯、邏輯形式主義的論戰，歐州移民來美數學家、二次大戰伊始立即組織數學家的狂熱。本書也談到戰事結束後純數學與應用數學分了家、大學裡新派學生對大數奮勇纏鬥、聯邦籌募基金獎助數學研究，最近更有電腦的興起以及一些現代研究的凱歌。

1931 年帝國大廈開放給民衆，兩年後羅斯福作了美國第 32 任總統，1935 年通過社會安全福利制度，1938 制定最低工資制度。就在羅斯福角逐總統之際，國際數學會議

在蘇黎世舉行，次年初希特勒掌權，Emmy Noether 赴美，數學家大移民潮於焉開始，他們是 Marshal Stone、von Neumann、Norbert Wiener、Artin、Bochner、Brauer、Chevalley、Courant、Eilenberg、Friedrichs、Kac、Levy、Pólya、Szegő、Ulam、Weil、Weyl、Wigner、Zorn、Ewing 說名單要長多了，只列出了這些，那麼多的數學精英都去了美國，難怪美國數學大為改觀獨霸武林了。

Ewing 談那個時代有段話很有意思

In 1938, there were 65 new Ph. D.'s in mathematics. Their prospects in academic life were grim. Starting salaries were about \$1800, which was lower than salaries at the beginning of the decade. The normal teaching load at Purdue was 18 hours, but that was higher than most (where it was 12 to 15 hours). Promotions were slow, and most faculty were at the bottom. Departments were almost universally undemocratic, ruled by a head with an indefinite term. (1938年誕生了65位數學博士。他們的學術生涯前景暗淡。起薪 \$1800，比十年前的薪水低。在普通大學正規教學時數是18小時，比多數學校要高，一般是12至15小時。晉級很慢，多數教師都是在最起碼的級。系務管理普遍的不民主，由一個名分未定的主管管理。)

這裡 \$1800 沒有說明是年薪或月薪，想必是年薪，若為月薪就太高了。作個比較，

筆者民國五十一年畢業，在北市萬華初中教，起薪八百元，三年後轉往景美女中調為九百，五十八年回母校建中大約是一千二百元左右，現在是八十八年一月，每週數學課14小時，擔任導師另有班會與週會二節，待遇也高多了。至於升級是談不到的，在萬中是教初中，自五十四年起都是教高三，“職稱”是教師，三十七年來沒有“升級”。

1940年哈地 (G. H. Hardy) 說過，真的有一支應用數學如彈道學 (ballistics)、空氣動力學 (aerodynamics)，是蓄意為戰爭發展的……它們都不能稱之為“真數學”。它們令人作三日嘔，單調得不能忍耐；就算是 Littlewood 都不能讓彈道學有面子，誰又能呢？

珍珠港事變美國吃了大虧，全面捲入大戰，數學家也難以置身度外，大批數學家離開了工作崗位，進入軍事單位，他們表現傑出獲得將領們的重視。可是他們都認為研究對象乏善可陳，對數學本身了無助益。

「Hardy's "A Mathematician's Apology" L. J. Mordell (1970)」是一篇長達五頁的文章，凡異出版社「數學圈」雜誌有連載「一位職業數學家的辯白」，有單行本。本文談此書風趣雋永，哈地最難受的是年過六十失去了創造力，只能寫“有關”數學的文字而不是寫數學，老驥伏櫪，志在千里，烈士暮年，壯心不已。這是民國五十九年寫的，現在是民國八十八年，情況大不相同了；醫療衛生進步又有電腦相助，耳順之年仍然大有可為。今天的數學家要幸運多了。

本書共選百年來美國數學月刊92篇文章，當然是篇篇佳作，其中與「教數學、數學

教育」有關的共有八篇，而八篇裡談大學數學教育的有五篇，可以看出 EWING 對數學教育的重視，它們是：

- 一. The teaching of mathematics in the colleges, H. E. Slaught (1909)
- 二. How can interest in calculus be increased? Roscoe Woods (1929)
- 三. The additional formulas for the Sine and Cosine, E. J. McShane (1941)
- 四. A manual for young teachers of mathematics, H. E. Buchnan (1946)
- 五. The teaching of college mathematics, F. D. Murnaghan (1946)
- 六. The teaching of mathematics in colleges and universities, E. P. Vance (1948)
- 七. Mathematical teaching in universities, Ander Weil (1954)
- 八. A dilemma in mathematical education, T. L. Saaty (1966)

第一篇寫於1909，那是民前三年，二十世紀的最初十年，見證了改進美國中等數學教育的興趣，其中包括主題、呈現形式、課程安排與教師培育；原來在那時之前，中學教師並不需要具備大學畢業資格，從那時之後，沒有大學畢業想在任何初、高中謀一教職是不可能的。

第二篇指出由於數學本身潛在的特性，比起其他科目來更需要老師。哈佛 Osgood 教授在美國數學協會演講時主張微積分應該以詮釋物理現象的方式來教，不論學生將來作何營生或主修那一科，微積分只有一種。

Rietz 教授也寫過類似文章，微積分的教學目標要給學生植入某些概念，十年之後仍能記住。本文把學生學習態度不佳歸納成六項，至於提高微積分的興趣，除了改進以上六項之外，又提出九點建議，很值得參考。

數學是學子夢魘，而三角更是夢魘裡的夢魘；有太多公式要記，筆者年年擔任高三課程，複習時對三角總是要花上最多的時間。我想三角高一要教、高二要教、高三還要教，高一教到特別角三角函數、複角函數、和差化積與積化和差；高二教三角形的特質、正餘弦定律等；高三教三角函數圖形、三角方程式與反三角函數，教新的就要用到舊的，能收到溫故知新之效。把這些數學精華一口氣在一學期教完，難怪學子受不了。現行教材更是精簡，高一下一個月教完三角，所以就不堪聞問了。當然我的想法是個夢，與現實相去太遠無法實施。不過本專輯裡第三篇一文的作法很值得推廣，雖然發表於民國三十年，它一點也不落伍很有創見。本文作者表示他一直想要找出有關正、餘弦公式的證法，它要有三項特性：

對一切角均為正確，不需要討論角在第幾象限

不需要知道正、餘弦的  $n \cdot 90^\circ \pm \theta$  函數值

初學三角的學生不會覺得太困難

當然要會距離公式，他首先從三角函數的定義開始以及方程式

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

$$\cos 0^\circ = \sin 90^\circ = 1,$$

$$\cos 90^\circ = \sin 0^\circ = 0$$

四點  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 、 $(\cos \beta, \sin \beta)$ 、 $(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$ 、 $(1, 0)$  至原點的距離都是1, 利用距離公式很容易就求出公式

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

然後完全不使用正、餘弦的  $n \cdot 90^\circ \pm \theta$  函數值, 依序導出

$$\begin{aligned} &\cos(-\alpha), \cos(90^\circ - \alpha), \sin(90^\circ - \alpha), \\ &\sin(\alpha + \beta), \sin(-\alpha), \\ &\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

的結果, 用這種方式給初學者介紹三角是很值得借鏡的。

第四篇是「年輕數學教師手冊」, 共列出六項重點, 他們是教室訓練 (Class discipline)、上黑板與家庭作業 (Board and homework)、小測驗與考試 (Quizzes and examinations)、課前準備 (The instructor's preparation for class)、榮譽制度 (The honor system)、班級經營 (Conducting a class)。也許有人看了本篇會說這都是老生常談, 要能作到呢, 那學子實在太幸運了。當然有些是陳義過高, 現行制度之下無法實施。教師要細讀本文, 雖然標榜「年輕」, 要達到這種境界, 是需要些年紀的。在班級經營一段裡有一句話是「the lecture method is a poor way to teach mathematics.」是有待商榷的, 至少在教畢業班時, 實在找不到時間給大家討論。

第五篇作者抱怨學過三角的學生沒人知道, 一角的正弦比起角的本身來是個較簡單的觀念, 當他問這些學生直角是甚麼, 學生

高高興興的答以它是 90 度; 再問一度是甚麼, 又高高興興的答以那是直角的九十分之一。他很激動, 怎麼能把一些聰明、機靈年輕美國人教成這個樣子? 本文發表於民國三十五年, 他的要求太高了, 一般學生有這種水準已經是可以了; 所以他的同事談教微積分就說沒有辦法正經八百的教, 要作的就是教運算技巧, 學生能微分與積分複雜式子, 至少看到導函數與積分符號不害怕, 少數學生以後學到更高級課程或獨立作研究時, 會弄清楚導函數或積分到底是甚麼。作者又感嘆多數教微積分都是只教單變數函數, 可是多數在工程、物理、化學上的有趣應用必需和多變數函數打交道。所以他提出了由 differentiable function 著手的教法。

第六篇談聯邦政府給研究獎助, 很像我國國科會的獎勵大專教師作研究。本文強調過多獎勵使高級人才不往大學任教是不智的, 又建議教師接受獎助者至少要有一半時間作教學, 文內頗有一些幽怨。第七篇是把一次數學聯席會議的演講作了大綱 (outline), 一共有九項, 數學教師與負責數學教育決策人士都要細讀。

緊隨第七篇之後有一小方塊, 很有補白 (dummy) 的味道, 1954年61期

MORRIS KLINE,

FRESHMAN MATHEMATICS

克來因 (Kline) 表示, 我們給了大一學生一些甚麼普通數學, 一般大學都是代數與三角, 這些都是浪費時間。真正有教育價值的是指數、根數、對數、霍納法 (Horner's method)、部分分式、二項定理...

第八篇探討教育瓶頸，強調培養資深有經驗教師，比專精某一領域更有必要。

1942年49期有懸賞徵答 (A Mathematical Contest)，對數學系師生來說當然更具吸引力，至少要答對15項，並列明出處，本專輯只列出了12項

1. 一位已故數學家，寫了很多受歡迎的童書
2. 發明用座標  $x, y$  代表點的一位數學家
3. 一位女數學家爲了逃離蘇俄十八歲結婚
4. 一位希臘數學家也是音樂家、哲學家
5. 一位數學家的大名提示了 Robert Browning 一首名詩的題目
6. 寫了最古老的數學教科書，現在實質上還在用
7. 父女都是著名數學家
8. 談吐風趣的教授，寫下很不尋常的有趣算術
9. 第一位著名女數學家
10. 由於火災，就從數學改行當建築師了
11. 一位英國數學家，他只知道二首歌曲。其中一首是“上帝拯救皇后 God save the Queen”。他怎麼知道的？說來有趣，這一首要站著唱，而另一首不要。
12. 一位數學家也是小提琴好手

對我國人士來說，第5題難了些。

一篇很短的小文很有意思

Postcards on Applied Mathematics,  
J. L. Synge (1939)

作者自說自話，將來歷史家談我們這個時代要如何下筆呢？他可以用數學家對應用數學的態度來談：

完全不懂應用數學不想去瞭解，以

爲那是次一等的心智活動

想要認識認識應用數學，可是沒有時間，那不是我主要的興趣

主要的興趣在應用數學，搞純數學不過是和應用數學沾上了點邊兒罷了

當然也有那麼幾個不能歸於以上三類，他們人數少本領高又不侷限於一隅。這是民國二十八年美國的時代背景，今天是民國八十八年又如何呢？忘了那位老兄講過「一流數學家搞理論數學、二流的搞應用數學或電腦、甚麼都不會的就專事數學教育」。我不知道對不對，所以記下來請教大家。我想無所謂一流、二流的問題，興趣是徵結所在。至於「甚麼都不會」那是因爲懂數學教育的不是當權派？或沒有主持行政工作罷了。

本世紀中業1950年57期的月刊有二篇文章討論數學的將來

André Weil, The future of mathematics

C. E. Shannon, A symmetrical notation for numbers

前者開場白就提到 Poincaré 說，有人作不幸的預言，所有的問題都已解決了，後人只不過是拾人牙慧罷了；又說今天甚麼也沒留下。其實數學老師也常想定理是不是都發明完了，他真是說到咱們的心坎裡。據說好的文章不一定短，壞的文章一定長，此文可就是又好又長。本文指出沒有數學的文化是不可思議的，在我們這個時代，很少有人像數學家這麼自由作自己的心智活動，數學家只需要鉛筆和紙，就算是沒有也一樣作數學。全世界都在教數學，這裡教得好，那裡教得差勁兒，被放

逐、流亡的數學家處處為家，都可以把數學追逐到某種程度，就是在監獄裡也能作出好數學。後者是電腦科學的較短摘要，也是預言數學的未來。

1965年2期費因曼 (Richard P. Feynmann) 的一篇談“新數學”

New textbooks for the “New Mathematics,”

他是很不以為然的，新數學的很多內容都是純數學家才有興趣的 (Many of the books go into considerable detail on subjects that are only of interest to pure math-

ematicians)，那是民國五十四年的文章，那一年台灣開始實施“新數學”，數學界本來是平靜無波的，實施以後平添許多紛爭，學子飽受摧殘持續達二十三年之久。科學月刊出版社有專書「新數學為何失敗」、「數學傳播」也有多篇討論“新數學”的文章可以參考。

這本書給人的感覺是充實、滿足、愜意與真相的認知，希望教師與學子也都看看，篇篇有可讀性，篇篇要細讀。

—本文作者任教於建國中學—