高中數學問題的實驗與猜想

李政豐 · 錢閔蔚 · 高崇晏 · 吳崇瑋

(一) 引言:

八十七年的暑假, 很榮幸有機會參加交大應用數學系為高中職教師舉辦的「數學與高科技研習營」, 在一週的討論課程中, 得到很多的教學理念與方法, 在數學實驗的課程中有一點心得, 在此提出與老師們分享。

(二) 過程:

剛剛開始接到本校老師提出的問題: 試證明公式

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\sqrt{\frac{2n+1}{4^n}}$$

(這個證明後來由張鎮華教授, 黃大原教授, 陳明峰老師分別提出, 在常庚哲教授的書中也有類似的證法, 本文中所討論的是用不同的角度去思考問題所得到的經驗與收獲)。

在此之前我們對上面等式感到相當陌生, 因為 $\sin\frac{k\pi}{2n+1}$ 絕大部份都是無理數, 而且是複雜度高的根式, 為了確認公式的正確性, 於是我們開始實驗:

$$n=1 \quad \sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 成立}$$

$$n=2 \quad \sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{\frac{2\times 2+1}{4^2}}=\frac{\sqrt{5}}{4} \text{ 成立}$$

$$(\sin 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\sin 72^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4})$$

$$n=3 \quad \sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}=\sqrt{\frac{2\times 3+1}{4^3}}=\frac{\sqrt{7}}{8}$$

$$n=4 \quad \sin\frac{\pi}{9}\cdot\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\sqrt{\frac{2\times 4+1}{4^4}}=\frac{\sqrt{9}}{16}$$

$$n=5 \quad \sin\frac{\pi}{11}\cdot\sin\frac{2\pi}{11}\cdot\sin\frac{3\pi}{11}\cdot\sin\frac{4\pi}{11}\cdot\sin\frac{5\pi}{11}=\sqrt{\frac{2\times 5+1}{4^5}}=\frac{\sqrt{11}}{32}$$

其中 $n=3,4,5$ 都是由電算器算得, 於是臆測這個公式可能是對的。

(三) 逆向思考:

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\sqrt{\frac{2n+1}{4^n}}$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{2n+1}{4^n}$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}\frac{1-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}}{2}=\frac{2n+1}{4^n},\ \text{令}\ \frac{2\pi}{2n+1}=\theta$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}(1-\cos k\theta)=(1-\cos\theta)\cdot(1-\cos 2\theta)(1-\cos 3\theta)\cdots\cdot(1-\cos n\theta)=\frac{2n+1}{2^n}$$

(四) 猜想:

上式左邊可看做函數 $f_n(x)=(x-\cos\theta)(x-\cos 2\theta)(x-\cos 3\theta)(x-\cos 4\theta)\cdots(x-\cos n\theta)$ 用 $x=1$ 代入的結果。

(五) 找尋:

$f_n(x)$ 到底是那一種型態的多項式? (或 $f_n(x)=0$ 是那一種型態的方程式?)

由 $\frac{2\pi}{2n+1}=\theta$

$n=1$ 時 $\quad x-\cos\frac{2\pi}{3}=0\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow 2x+1=0 \quad f_1(x)=2x+1$

$n=2$ 時 $\quad (x-\cos\frac{2\pi}{5})(x-\cos\frac{4\pi}{5})=0\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$

$$(\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4})$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+2x-1=0$$

$$f_2(x)=4x^2+2x-1$$

$n=3$ 時 $\quad (x-\cos\frac{2\pi}{7})(x-\cos\frac{4\pi}{7})\cdot(x-\cos\frac{6\pi}{7})=0$

$$\Leftrightarrow x^3-(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7})x^2+(\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$
$$+\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7})x-\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(甲式)}$$

$$
\begin{aligned}
&\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\\
=&\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\\
=&\frac{(\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{-\pi}{7})+(\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\frac{-3\pi}{7})+(\sin\pi+\sin\frac{-5\pi}{7})}{2\sin\frac{\pi}{7}}\\
=&\frac{-1}{2}\\
&\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}\\
=&\frac{1}{2}(2\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+2\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\frac{6\pi}{7})\\
=&\frac{1}{2}(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7})\\
&\qquad(\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\frac{6\pi}{7},\cos\frac{10\pi}{7}=\cos\frac{4\pi}{7})\\
=&\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{-1}{2}\\
&\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\\
=&\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}\\
=&\frac{1}{8\sin\frac{2\pi}{7}}(2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7})(2\cos\frac{4\pi}{7})(2\cos\frac{8\pi}{7})\\
=&\frac{1}{8\sin\frac{2\pi}{7}}(\sin\frac{4\pi}{7})(2\cos\frac{4\pi}{7})(2\cos\frac{8\pi}{7})\\
=&\frac{1}{8\sin\frac{2\pi}{7}}(2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7})(2\cos\frac{8\pi}{7})\\
=&\frac{1}{8\sin\frac{2\pi}{7}}(\sin\frac{8\pi}{7})(2\cos\frac{8\pi}{7})\\
=&\frac{1}{2\sin\frac{2\pi}{7}}(\sin\frac{16\pi}{7})=\frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

把這些結果代入 (甲式)

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}=0\\
&\Leftrightarrow 8x^3+4x^2-4x-1=0
\end{aligned}
$$

$$f_3(x)=8x^3+4x^2-4x-1$$

$n=4$ 時　$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=(2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9})+(\frac{-1}{2})+\cos\frac{8\pi}{9}=\frac{-1}{2}$

$$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{6\pi}{9}$$
$$+\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9})-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}+\frac{1}{2}(\cos\frac{10\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9})-\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{9}$$
$$+\frac{1}{2}(\cos\frac{12\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9})-\frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{9}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}+\frac{1}{2}\cos\frac{10\pi}{9}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{9}-\frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{9}$$
$$=\frac{-3}{4}$$

$$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{6\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$
$$+\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{6\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{2}(\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9})\cos\frac{8\pi}{9}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$
$$-\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$
$$=-\frac{1}{4}(\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9})-\frac{1}{4}\cos\frac{8\pi}{9}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$
$$-\frac{1}{4}(\cos\frac{12\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9})$$
$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{9}-\frac{1}{4}\cos\frac{8\pi}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}(\cos\frac{4\pi}{9})$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9})$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9})$$
$$=\frac{1}{4}$$

$$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{6\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$
$$=-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{8\sin\frac{2\pi}{9}}(2\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9})(2\cos\frac{4\pi}{9})(2\cos\frac{8\pi}{9})\Big]$$
$$=-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{8\sin\frac{2\pi}{9}}\Big]\Big[\sin\frac{16\pi}{9}\Big]$$
$$=(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{8})=\frac{1}{16}$$

把這些結果代入方程式 $(x-\cos\frac{2\pi}{9})(x-\cos\frac{4\pi}{9})(x-\cos\frac{6\pi}{9})(x-\cos\frac{8\pi}{9})=0$ 得

$$x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}=0$$
$$\Leftrightarrow 16x^4+8x^3-12x^2-4x+1=0$$
$$\text{取 } f_4(x)=16x^4+8x^3-12x^2-4x+1$$

(六) 觀察:

$f_1(x)=2x+1$	$f_1(x)=3=2\times 1+1$
$f_2(x)=4x^2+2x-1=(2x)f_1(x)-1$	$f_2(1)=2f_1(1)-1=5=2\times 2+1$
$f_3(x)=8x^3+4x^2-4x-1=(2x)f_2(x)-f_1(x)$	$f_3(1)=2f_2(1)-f_1(1)=7=2\times 3+1$
$f_4(x)=16x^4+8x^3-12x^2-4x+1$	$f_4(1)=2f_3(1)-f_2(1)=9=2\times 4+1$
$=(2x)f_3(x)-f_2(x)$	

(七) 猜想:

若規定 $f_0(x)=1$

觀察 $f_4(x)=16x^4+8x^3-12x^2-4x+1=2^4(x-\cos\frac{2\pi}{9})(x-\cos\frac{4\pi}{9})(x-\cos\frac{6\pi}{9})(x-\cos\frac{8\pi}{9})$, 若調整假設 $f_n(x)=2^n(x-\cos\frac{2\pi}{2n+1})(x-\cos\frac{4\pi}{2n+1})(x-\cos\frac{6\pi}{2n+1})\cdots(x-\cos\frac{2n\pi}{2n+1})$

我們發現了一個奇妙的關係:

遞迴關係式 $f_{n+2}(x)=(2x)f_{n+1}(x)-f_n(x)$ 可能會成立 $(n\in Z, n\geq 0)$

$f_{n+2}(1)=2f_{n+1}(1)-f_n(1)=2(2(n+1)+1)-(2n+1)=2(n+2)+1$ 可能會成立

(八) 再實驗:

$$f_5(x)=(2x)f_4(x)-f_3(x)=32x^5+16x^4-32x^3-12x^2+6x+1$$

把 $\cos\frac{2k\pi}{11}$ 其中 $k=1,2,3,4,5$ 代入 $f_5(x)=0$ 其值均甚小 (約爲 $a\times 10^{-6}$, $1\leq |a|<10$) (此處寫了一個 qbasic 的程式把係數輸入計算)

$$f_6(x)=(2x)f_5(x)-f_4(x)=64x^6+32x^5-80x^4-32x^3+24x^2+6x-1$$

再把 $\cos\frac{2k\pi}{13}$ 其中 $k=1,2,3,4,5,6$ 代入 $f_6(x)=0$ 其值亦甚小 (約爲 $a\times 10^{-7}$, $1\leq |a|<10$)。

(九) 預測:

遞迴關係式 $f_{n+2}(x)=(2x)f_{n+1}(x)-f_n(x)$ 會成立的機率相當大 $(n\in Z,\ n\ge 0)$ 至少 $f_n(1)=2n+1$ 是成立的, 因此

$$f_n(x)=2^n(x-\cos\frac{2\pi}{2n+1})(x-\cos\frac{4\pi}{2n+1})(x-\cos\frac{6\pi}{2n+1})\cdots(x-\cos\frac{2n\pi}{2n+1})$$

極有可能會成立。果如此: $f_5(x)=32x^5+16x^4-32x^3-12x^2+6x+1$ 可藉由比較係數而得到

$$\sum_{k=1}^{5}\cos\frac{2k\pi}{11}=-\frac{1}{2}$$
$$\prod_{k=1}^{5}\cos\frac{2k\pi}{11}=\frac{1}{32}$$

$f_6(x)=64x^6+32x^5-80x^4-32x^3+24x^2+6x-1$ 可藉由比較係數而得到

$$\sum_{k=1}^{6}\cos\frac{2k\pi}{13}=-\frac{1}{2}$$
$$\prod_{k=1}^{6}\cos\frac{2k\pi}{13}=\frac{1}{64}$$

這些等式都是我們不太瞭解的無理數所構成, 於是我們產生了很大的興趣。

(十) 尋找證明:

$x^{2n+1}-1=0$ 的原根是 $p=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1}$, 我們知道 $p^{2n+1}=1$, 而 $p^1,p^2,p^3\cdots p^{2n},p^{2n+1}$ 是它的 $2n+1$ 個根 $x^{2n+1}-1=(x-1)(x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x^2+x+1)$

$$\begin{aligned}(x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x^2+x+1)&=(x-p)(x-p^2)(x-p^3)\cdots(x-p^{2n-2})(x-p^{2n-1})(x-p^{2n})\\&=\prod_{k=1}^{2n}(x-p^k)\\ \text{(經由前後配對)}&=\prod_{k=1}^{n}(x-p^k)(x-p^{2n+1-k})\\&=\prod_{k=1}^{n}(x^2-(p^k+p^{2n+1-k})x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p^k+p^{2n+1-k})&=(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1})+(\cos\frac{(2n+1-k)2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{(2n+1-k)2\pi}{2n+1})\\&=2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned}(x^{2n}+^{2n-1}+\cdots+x+1)&=\prod_{k=1}^{n}(x^2-(p^k+p^{2n+1-k})x+1)\\&=\prod_{k=1}^{n}(x^2-(2\cos\frac{2k\pi}{2n+1})x+1)\\&=\prod_{k=1}^{n}(2x)(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{2k\pi}{2n+1})\\&=2^nx^n\prod_{k=1}^{n}(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{2k\pi}{2n+1})\end{aligned}$$

(把兩邊同除 x^n)

$$\frac{x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1}{x^n}=2^n\prod_{k=1}^{n}(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{2k\pi}{2n+1})$$

再把右邊的 $\frac{x+\frac{1}{x}}{2}$ 用 y 來取代

令 $g_n(x)=\dfrac{x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1}{x^n}=2^n\prod_{k=1}^{n}(y-\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1})=f_n(y)\cdots\cdots\cdots$ (A 式)

(上面這一步是把 $n=3$, $n=4$ 試了好幾次才得到的結果, 我們感覺是一個最重要的關鍵) 由

$$\begin{aligned}(x+\frac{1}{x})g_{n+1}(x)-g_n(x)&=(x+\frac{1}{x})(\frac{x^{2n+2}+x^{2n+1}+x^{2n}\cdots x^2+x+1}{x^{n+1}})\\&-(\frac{x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1}{x^n})\\&=\frac{x^{2n+4}+x^{2n+3}+\cdots x^2+x+1}{x^{n+2}}=g_{n+2}(x)\end{aligned}$$

對所有的 $n=1,2,3,\ldots$ 都成立, 得

$$(2y)f_{n+1}(y)-f_n(y)=f_{n+2}(y)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad\text{(B 式)}$$

在這裡我們很高興能證明了一個重要的遞迴關係式。

由 (A 式)

$$\begin{aligned}f_1(x)&=2(x-\cos\frac{2\pi}{3})=2x+1\\f_2(x)&=4(x-\cos\frac{2\pi}{5})(x-\cos\frac{4\pi}{5})=4x^2+2x-1\end{aligned}$$

由 (B 式)

$$\begin{aligned}f_3(x)&=2xf_2(x)-f_1(x)=8x^3+4x^2-4x-1\\f_4(x)&=2xf_3(x)-f_2(x)=16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\\f_5(x)&=2xf_4(x)-f_3(x)=32x^5+16x^4-32x^3-12x^2+6x+1\end{aligned}$$

應用 (1)

$\cos\frac{2\pi}{11}, \cos\frac{4\pi}{11}, \cos\frac{6\pi}{11}, \cos\frac{8\pi}{11}, \cos\frac{10\pi}{11}$ 是我們不太瞭解的無理數, 但由 (A 式)

$$f_n(x) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(x - \cos\frac{2k\pi}{2n+1}) \text{ 及 } f_5(x) = 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1$$

我們得到:

$$\begin{aligned}&2^5(x-\cos\frac{2\pi}{11})(x-\cos\frac{4\pi}{11})(x-\cos\frac{6\pi}{11})(x-\cos\frac{8\pi}{11})(x-\cos\frac{10\pi}{11})\\ =\ &32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1\end{aligned}$$

由根與係數的關係, 我們揭開它神秘的面紗!

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{5}\cos\frac{2k\pi}{11} = -\frac{1}{2}$$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=i+1}^{5}(\cos\frac{2i\pi}{11})(\cos\frac{2k\pi}{11}) = -1$$

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\sum_{k=j+1}^{5}(\cos\frac{2i\pi}{11})(\cos\frac{2j\pi}{11})(\cos\frac{2k\pi}{11}) = \frac{3}{8}$$

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{k=j+1}^{4}\sum_{l=k+1}^{5}(\cos\frac{2i\pi}{11})(\cos\frac{2j\pi}{11})(\cos\frac{2k\pi}{11})(\cos\frac{2l\pi}{11}) = \frac{3}{16}$$

$$(5)\quad \prod_{k=1}^{5}\cos\frac{2k\pi}{11} = \frac{-1}{32}$$

把 n 用其他的自然數代入, 又可以得到一系列我們不曾看過的公式, 諸如此類不容易由和積互化得到的一大堆公式, 我們可輕易導出。而且我們還知道那些無理數可以搭配成有理數, 上面五個式子右端全是有理數。這眞是一件奇妙的事。

應用 (2)

我們可以利用 $f_n(x)=2^n\prod_{k=1}^{n}(x-\cos\frac{2k\pi}{2n+1})$ 與遞迴關係式 $f_{n+2}(x)=(2x)f_{n+1}(x)-f_n(x)$

$$f_1(x)=2x+1$$
$$f_2(x)=4x^2+2x-1=2^2(x-\cos\frac{2\pi}{5})(x-\cos\frac{4\pi}{5})$$
$$f_3(x)=8x^3+4x^2-4x-1=2^3(x-\cos\frac{2\pi}{7})(x-\cos\frac{4\pi}{7})(x-\cos\frac{6\pi}{7})$$
$$f_3(x)=2xf_2(x)-f_1(x)$$
$$2^3(x-\cos\frac{2\pi}{7})(x-\cos\frac{4\pi}{7})(x-\cos\frac{6\pi}{7})=2x[2^2(x-\cos\frac{2\pi}{5})(x-\cos\frac{4\pi}{5})]-(2x+1)$$

將它開展

$$8x^3-8(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7})x^2+8(\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}$$
$$+\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7})x-8\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=8x^3-8(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5})x^2$$
$$+8(\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}-\frac{1}{4})x-1$$

比較係數而得到下列公式:

(1) $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

(2) $\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}-\frac{1}{4}=\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$

(3) $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{8}$

如此我們可以得到兩種相近但不同類角度餘弦, $\cos\frac{2k\pi}{5}$ 與 $\cos\frac{2k\pi}{7}$ 之關係, 其實任何 $\cos\frac{2k\pi}{2n+1}$ 與 $\cos\frac{2k\pi}{2n+3}$ 之關係, 都可由類似的方法導出, 這種公式也有一大堆。

更進一步: $f_5(x)=2xf_4(x)-f_3(x)=2x[2xf_3(x)-f_2(x)]-f_3(x)=(4x^2-1)f_3(x)-2xf_2(x)$

(甲) $f_5(x)=2^5(x-\cos\frac{2\pi}{11})(x-\cos\frac{4\pi}{11})(x-\cos\frac{6\pi}{11})(x-\cos\frac{8\pi}{11})(x-\cos\frac{10\pi}{11})$

(乙) $(4x^2-1)f_3(x)-2xf_2(x)=(4x^2-1)[2^3(x-\cos\frac{2\pi}{7})(x-\cos\frac{4\pi}{7})(x-\cos\frac{6\pi}{7})]$
$-2x(4x^2+2x-1)$

展開 (甲)(乙) 比較兩式係數又可得到差二級的角度餘弦公式 $\cos\frac{2k\pi}{7}$, $\cos\frac{2k\pi}{11}$ 之關係。例如我們比較 x^4, x^3 的係數, 與常數項可以得到下列三個公式:

$$(1)\quad \cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=i+1}^{5}(\cos\frac{2i\pi}{11})(\cos\frac{2k\pi}{11})=\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=i+1}^{3}(\cos\frac{2i\pi}{7})(\cos\frac{2k\pi}{7})-\frac{1}{2}$$

$$(3)\quad -\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{6\pi}{11}\cos\frac{8\pi}{11}\cos\frac{10\pi}{11}=\frac{1}{4}(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7})$$

這種應用公式也有一大堆

應用 (3)

令

$$g_n(x)=\frac{x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1}{x^n}=(x^n+\frac{1}{x^n})+(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}})\cdots+(x+\frac{1}{x})+1$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(x^k+\frac{1}{x^k})+1$$

用遞迴關係式 $(x+\frac{1}{x})(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}})-(x^k+\frac{1}{x^k})=(x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$

原先我們曾用數學歸納法證明對每個自然數 n, $(x^k+\frac{1}{x^k})$ 都能表成 $y=\frac{x+\frac{1}{x}}{2}$ 的多項式函數, 進而證明 $g_n(x)$ 能表成 y 的多項式函數, 其中曾經考慮二項式定理:

$$(x+\frac{1}{x})^n=C_n^nx^n+C_{n-1}^nx^{n-1}(\frac{1}{x})+\cdots+C_2^nx^{n-2}(\frac{1}{x})^2+C_1^nx^1(\frac{1}{x})^{n-1}+C_0^n(\frac{1}{x})^n$$
$$=(x^n+\frac{1}{x^n})+\sum_{i=1}^{n-1}C_i^nx^i(\frac{1}{x})^{n-i}\qquad 由\ C_i^n=C_{n-i}^n$$
$$C_i^nx^i(\frac{1}{x})^{n-i}+C_{n-i}^nx^{n-i}(\frac{1}{x})i=C_i^n(x^{n-2i}+\frac{1}{x^{n-2i}})$$

若 n 是奇數

$$\sum_{i=1}^{n-1}C_i^nx^i(\frac{1}{x})^{n-i}=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}C_i^n(x^{n-2i}+\frac{1}{x^{n-2i}})$$

若 n 是偶數

$$\sum_{i=1}^{n-1}C_i^nx^i(\frac{1}{x})^{n-i}=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]-1}C_i^n(x^{n-2i}+\frac{1}{x^{n-2i}})+C_{[\frac{n}{2}]}^n$$

故當 n 是奇數

$$(x+\frac{1}{x})^n=(x^n+\frac{1}{x^n})+\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}C_i^n(x^{n-2i}+\frac{1}{x^{n-2i}})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(D)$$

當是偶數

$$(x+\frac{1}{x})^n=(x^n+\frac{1}{x^n})+\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]-1}C_i^n(x^{n-2i}+\frac{1}{x^{n-2i}})+C_{[\frac{n}{2}]}^n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{(E)}$$

在 (D) 中, 取 $n=7$, 令 $x=\cos\frac{2\pi}{11}+i\sin\frac{2\pi}{11}$

$$(x+\frac{1}{x})=2\cos\frac{2\pi}{11},\quad (x^n+\frac{1}{x^n})=2\cos\frac{2n\pi}{11}$$

得公式 (1)

$$(2\cos\frac{2\pi}{11})^7=2\cos\frac{14\pi}{11}+C_1^7(2\cos\frac{10\pi}{11})+C_2^7(2\cos\frac{6\pi}{11})+C_3^7(2\cos\frac{2\pi}{11})$$

在 (E) 中, 取 $n=8$, 令 $x=\cos\frac{2\pi}{11}+i\sin\frac{2\pi}{11}$ 得公式 (2) $(2\cos\frac{2\pi}{11})^8=2\cos\frac{16\pi}{11}+C_1^8(2\cos\frac{12\pi}{11})+C_2^8(2\cos\frac{8\pi}{11})+C_3^8(2\cos\frac{4\pi}{11})+C_4^8$

只要改變 x 與 n, 我們又可得到一堆漂亮的倍角公式, 這些都不是由高中數學的三角函數公式能輕易得到的。

應用 (四)

$$g_n(x)=\frac{x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1}{x^n}=\frac{x^{2n+1}-1}{x^n(x-1)}$$

因此 $x^{2n+1}-1=0$ 的根除1之外都是 $g_n(x)=0$ 的根

$$x^{2n+1}-1=0\Leftrightarrow x=\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}\qquad k=0,1,2,3,\ldots 2n$$

故

$$g_n(x)=\frac{x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1}{x^n}=\frac{\prod_{k=1}^{2n}(x-(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}))}{x^n}\cdots\cdots\cdots \quad \text{(F)}$$

把 $x=1$ 代入上式: $2n+1=\prod_{k=1}^{2n}(1-(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}))$

$$\begin{aligned}2n+1&=\prod_{k=1}^{2n}(1-\cos\frac{2k\pi}{2n+1})-i\sin\frac{2k\pi}{2n+1})\\&=\prod_{k=1}^{2n}(2\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}-2\sin\frac{k\pi}{2n+1}\cos\frac{k\pi}{2n+1}i)\\&=\prod_{k=1}^{2n}((2\sin\frac{k\pi}{2n+1})(\sin\frac{k\pi}{2n+1}-i\cos\frac{k\pi}{2n+1}))\end{aligned}$$

$$=\prod_{k=1}^{2n}((2\sin\frac{k\pi}{2n+1})(-i)(\cos\frac{k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{k\pi}{2n+1}))$$
$$=2^{2n}(-i)^{2n}\Big[\prod_{k=1}^{2n}(\sin\frac{k\pi}{2n+1})\Big]\Big[\prod_{k=1}^{2n}(\cos\frac{k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{k\pi}{2n+1)})\Big]$$
$$=(-4)^n\Big[\prod_{k=1}^{2n}(\sin\frac{k\pi}{2n+1}\Big](\cos\frac{(1+2\cdots+2n)\pi}{2n+1}+i\sin\frac{(1+2\cdots+2n)\pi}{2n+1})$$
$$2n+1=(-4)^n\Big[\prod_{k=1}^{2n}(\sin\frac{k\pi}{2n+1})\Big](\cos n\pi+i\sin n\pi)$$

得公式 (1) $\prod_{k=1}^{2n}(\sin\frac{k\pi}{2n+1})=\frac{2n+1}{(-4)^n(\cos n\pi+i\sin n\pi)}=\frac{2n+1}{4^n}$
把 $x=-1$ 代入 (F) 式:

$$1=\prod_{k=1}^{2n}(-1-(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}))$$
$$=\prod_{k=1}^{2n}(-2\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}-2\sin\frac{k\pi}{2n+1}\cos\frac{k\pi}{2n+1}i)$$
$$=(-2)^{2n}(\prod_{k=1}^{2n}\cos\frac{k\pi}{2n+1})(\prod_{k=1}^{2n}(\cos\frac{k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{k\pi}{2n+1}))$$
$$=4^n(\prod_{k=1}^{2n}\cos\frac{k\pi}{2n+1})(\cos\frac{(1+2+3+\cdots+2n)\pi}{2n+1}+i\sin\frac{(1+2+3+\cdots+2n)\pi}{2n+1})$$
$$=4^n(\prod_{k=1}^{2n}\cos\frac{k\pi}{2n+1})(\cos n\pi+i\sin n\pi)$$

得公式 (2) $\prod_{k=1}^{2n}(\cos\frac{k\pi}{2n+1})=\frac{11}{(4)^n(\cos n\pi+i\sin n\pi)}=\frac{1}{(-4)^n}$ 把 n 用不同的自然數代入這又產生一大堆不曾看見的三角公式。

再考慮 $x^{2n}-1=0$ 之原根 $p=\cos\frac{2\pi}{2n}+i\sin\frac{2\pi}{2n}$ 則 $p^{2n}=1$ 且

$$p^n=-1$$
$$x^{2n}-1=0\Leftrightarrow x=\cos\frac{2k\pi}{2n}+i\sin\frac{2k\pi}{2n}=p^k\quad k=1,2,3\ldots 2n。$$

把 $x^{2n}-1$ 除掉 $(x+1)(x-1)$: (即除掉 $(x-p^n)(x-p^{2n})$)

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=x^{2n-2}+x^{2n-4}+x^{2n-6}+\cdots+x^4+x^2+1\quad(\text{其中 } n\geq 1)$$
$$=(x-p)(x-p^2)\cdots(x-p^{n-1})(x-p^{n+1})\cdots(x-p^{2n-2})(x-p^{2n-1})$$
$$(\text{前後配對})=((x-p)(x-p^{2n-1}))((x-p^2)(x-p^{2n-2}))\cdots((x-p^{n-1})(x-p^{n+1}))$$

$$\begin{aligned}
\text{其中}\quad & (x-p^i)(x-p^{2n-i}) \\
&=(x-(cos\frac{2i\pi}{2n}+i\sin\frac{2i\pi}{2n}))(x-(\cos\frac{2(2n-i)\pi}{2n}+i\sin\frac{2(2n-i)\pi}{2n})) \\
&=(x-(\cos\frac{2i\pi}{2n}+i\sin\frac{2i\pi}{2n}))(x-(\cos(2\pi-\frac{2i\pi}{2n})+i\sin(2\pi-\frac{2i\pi}{2n})) \\
&=(x-(\cos\frac{2i\pi}{2n}+i\sin\frac{2i\pi}{2n}))(x-(\cos\frac{2i\pi}{2n}-i\sin\frac{2i\pi}{2n})) \\
&=x^2-2\cos\frac{2i\pi}{2n}x+1 \\
&=x^2-2\cos\frac{i\pi}{n}x+1 \quad \text{代入上式}
\end{aligned}$$

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=(x^2-2\cos\frac{\pi}{n}x+1)(x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1)\cdots(x^2-2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}x+1)\cdots(\mathrm{G})$$

即

$$\begin{aligned}
& x^{2n-2}+x^{2n-4}+x^{2n-6}+\cdots+x^2+1 \\
&=((2x)(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{\pi}{n}))((2x)(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{2\pi}{n}))\cdots((2x)(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{(n-1)\pi}{n})) \\
&=(2^{n-1})(x^{n-1})(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{\pi}{n}))(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{2\pi}{n})\cdots(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{(n-1)\pi}{n})
\end{aligned}$$

兩邊同除 (x^{n-1})

$$\begin{aligned}
& \frac{x^{2n-2}+x^{2n-4}+x^{2n-6}+\cdots+x^2+1}{x^{n-1}} \\
&=(2^{n-1})(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{\pi}{n})(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{2\pi}{n})\cdots(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}-\cos\frac{(n-1)\pi}{n})\cdots\cdots\cdots(\mathrm{H})
\end{aligned}$$

令 $g_{n-1}(x)=\frac{x^{2n-2}+x^{2n-4}+x^{2n-6}+\cdots+x^2+1}{x^{n-1}}$ 令 $y=\frac{x+\frac{1}{x}}{2}$ 代入 (H) 則

$$g_{n-1}(x)=(2^{n-1})(y-\cos\frac{\pi}{n})(y-\cos\frac{2\pi}{n})\cdots(y-\cos\frac{(n-1)\pi}{n})=f_{n-1}(y)\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

(其中自然數 $n\geq 2$)

由

$$\begin{aligned}
& (x+\frac{1}{x})(\frac{x^{2k+2}+x^{2k}+x^{2k-2}+\cdots+x^2+1}{x^{k+1}})-(\frac{x^{2k}+x^{2k-2}+x^{2k-4}+\cdots+x^2+1}{x^k}) \\
=&\frac{x^{2k+4}+x^{2k+2}+x^{2k}\cdots+x^4+x^2+1}{x^{k+2}}
\end{aligned}$$

得到下列遞迴關係式:

$(x+\frac{1}{x})(g_{k+1}(x))-(g_k(x))=(g_{k+2}(x))$ 即: $(2y)(f_{k+1}(y))-(f_k(y))=(f_{k+2}(y))$ 成立。

由 (H) 式與 (I) 式 $g_{n-1}(x)=f_{n-1}(y)$ 並且

$$g_{n-1}(x)=\frac{x^{2n-2}+x^{2n-4}+x^{2n-6}+\cdots+x^2+1}{x^{n-1}}$$

$$f_{n-1}(y)=(2^{n-1})(y-\cos\frac{\pi}{n})(y-\cos\frac{2\pi}{n})\cdots(y-\cos\frac{(n-1)\pi}{n})$$

當

$$n=2,\ f_1(y)=2(y-\cos\frac{\pi}{2})=2y$$

$$n=3,\ f_2(y)=2^2(y-\cos\frac{\pi}{3})(y-\cos\frac{2\pi}{3})=4y^2-1$$

$$f_3(y)=(2y)f_2(y)-f_1(y)=8y^3-4y$$

$$f_4(y)=(2y)f_3(y)-f_2(y)=16y^4-12y^2+1$$

$$f_5(y)=(2y)f_4(y)-f_3(y)=32y^5-32y^3+6y$$

$$f_6(y)=\cdots=64y^6-80y^4+24y^2-1$$

應用 (5)

由 (I) 式

$$f_6(y)=2^6(y-\cos\frac{\pi}{7})(y-\cos\frac{2\pi}{7})(y-\cos\frac{3\pi}{7})\cdots(y-\cos\frac{6\pi}{7})=64y^6-80y^4+24y^2-1$$

兩邊同除64:

$$(y-\cos\frac{\pi}{7})(y-\cos\frac{2\pi}{7})(y-\cos\frac{3\pi}{7})\cdots(y-\cos\frac{6\pi}{7})=y^6-\frac{5}{4}y^4+\frac{3}{8}y^2-\frac{1}{64}$$

經由比較係數, 得到下列公式:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\cos\frac{k\pi}{7}=0$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{6}\cos\frac{i\pi}{7}\cos\frac{j\pi}{7}=\frac{-5}{4}$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+1}^{5}\sum_{k=j+1}^{6}\cos\frac{i\pi}{7}\cos\frac{j\pi}{7}\cos\frac{k\pi}{7}=0$

(4) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\sum_{k=j+1}^{5}\sum_{l=k+1}^{6}\cos\frac{i\pi}{7}\cos\frac{j\pi}{7}\cos\frac{k\pi}{7}\cos\frac{l\pi}{7}=\frac{3}{8}$

(5) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{k=j+1}^{4}\sum_{l=k+1}^{5}\sum_{m=l+1}^{6}\cos\frac{i\pi}{7}\cos\frac{j\pi}{7}\cos\frac{k\pi}{7}\cos\frac{l\pi}{7}\cos\frac{m\pi}{7}=0$

(6) $\displaystyle\prod_{k=1}^{6}\cos\frac{k\pi}{7}=\frac{-1}{64}$

再由 (1) 與 (2)

$$\Big[\sum_{k=1}^{6}\cos\frac{k\pi}{7}\Big]^2=\sum_{k=1}^{6}\cos^2\frac{k\pi}{7}+2\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{6}(\cos\frac{i\pi}{7})(\cos\frac{j\pi}{7})$$

得公式:

$$(7)\quad \sum_{k=1}^{6}\cos^2\frac{k\pi}{7}=\frac{5}{2}$$

把 n 取不同的自然數, 我們又得到一堆另類的公式

應用 (6):

由 (G) 式

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=(x^2-2\cos\frac{\pi}{n}x+1)(x^2-\cos\frac{2\pi}{n}x+1)\cdots(x^2-2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}x+1)$$

$$x^{2n-2}+x^{2n-4}+x^{2n-6}+\cdots+x^2+1=\prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2\cos\frac{k\pi}{n}x+1)\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{J})$$

在 (J) 式中 x 用1代入:

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}(2-2\cos\frac{k\pi}{n})=\prod_{k=1}^{n-1}4\sin^2\frac{k\pi}{2n}=4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n}=\frac{n}{4^{n-1}}$$

兩邊開方, 得公式 (I) $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ $(n\geq 2)$

(J) 式中 x 用 -1 代入:

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}(2+2\cos\frac{k\pi}{n})=\prod_{k=1}^{n-1}4\cos^2\frac{k\pi}{2n}=4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\cos^2\frac{k\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow\prod_{k=1}^{n-1}\cos^2\frac{k\pi}{2n}=\frac{n}{4^{n-1}}$$

兩邊開方, 得公式 (2) $\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ $(n\geq 2)$。

當 n 是奇數時, $x=i$ 代入 (J) 式:

$$(-1)^{n-1}+(-1)^{n-2}+(-1)^{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}+(-1)+1=\prod_{k=1}^{n-1}(-1-2\cos\frac{k\pi}{n}x+1)$$

$$1=\prod_{k=1}^{n-1}(-2i\cos\frac{k\pi}{n})=(-2i)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}$$

得公式 (3) $\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{(-2i)^{n-1}}$ (當 n 是奇數且 $n\ge 3$ 都成立)

應用 (7)

$$\frac{x^8-1}{x^2-1}=x^6+x^4+x^2+1 \quad 令\ p=\cos\frac{2\pi}{8}+i\sin\frac{2\pi}{8}$$

$$x^6+x^4+x^2+1=(x-p)(x-p^2)(x-p^3)(x-p^5)(x-p^6)(x-p^7)$$

$$=((x-p)(x-p^7))((x-p^2)(x-p^6))((x-p^3)(x-p^5))$$

$$p+p^7=(\cos\frac{2\pi}{8}+i\sin\frac{2\pi}{8})+(\cos\frac{14\pi}{8}+i\sin\frac{14\pi}{8})=2\cos\frac{2\pi}{8}$$

$$p^2+p^6=2\cos\frac{4\pi}{8}$$

$$p^3+p^5=2\cos\frac{6\pi}{8}$$

$$p^8=1$$

$$x^6+x^4+x^2+1=(x^2-2\cos\frac{2\pi}{8}x+1)(x^2-2\cos\frac{4\pi}{8}x+1)(x^2-2\cos\frac{6\pi}{8}x+1)$$

$$\frac{x^{10}-1}{x^2-1}=x^8+x^6+x^4+x^2+1 \quad 令w=\cos\frac{2\pi}{10}+i\sin\frac{2\pi}{10}$$

$$x^8+x^6+x^4+x^2+1$$

$$=(x-w)(x-w^2)(x-w^3)(x-w^4)(x-x^6)(x-w^7)(x-w^8)(x-w^9)$$

$$=((x-w)(x-w^9))((x-w^2)(x-w^8))((x-w^3)(x-w^7))((x-w^4)(x-w^6))$$

$$=(x^2-2\cos\frac{2\pi}{10}x+1)(x^2-2\cos\frac{4\pi}{10}x+1)(x^2-2\cos\frac{6\pi}{10}x+1)(x^2-2\cos\frac{8\pi}{10}x+1)$$

但是 $x^2(x^6+x^4+x^2+1)+1=x^8+x^6+x^4+x^2+1$

$$x^2(x^2-2\cos\frac{2\pi}{8}x+1)(x^2-2\cos\frac{4\pi}{8}x+1)(x^2-2\cos\frac{6\pi}{8}x+1)+1$$

$$=(x^2-2\cos\frac{2\pi}{10}x+1)(x^2-2\cos\frac{4\pi}{10}x+1)(x^2-2\cos\frac{6\pi}{10}x+1)(x^2-2\cos\frac{8\pi}{10}x+1)\cdots(\mathrm{K})$$

在 (K) 式中 x 用1代入:

$$(2-2\cos\frac{2\pi}{8})(2-2\cos\frac{4\pi}{8})(2-2\cos\frac{6\pi}{8})+1$$

$$=(2-2\cos\frac{2\pi}{10})(2-2\cos\frac{4\pi}{10})(2-2\cos\frac{6\pi}{10})(2-2\cos\frac{8\pi}{10})$$

$$2^3(1-\cos\frac{2\pi}{8})(1-\cos\frac{4\pi}{8})(1-\cos\frac{6\pi}{8})+1$$

$$=2^4(1-\cos\frac{2\pi}{10})(1-\cos\frac{4\pi}{10})(1-\cos\frac{6\pi}{10})(1-\cos\frac{8\pi}{10})$$

$$\begin{aligned}&2^3(2\sin^2\frac{\pi}{8})(2\sin^2\frac{2\pi}{8})(2\sin^2\frac{3\pi}{8})+1\\=&2^4(2\sin^2\frac{\pi}{10})(2\sin^2\frac{2\pi}{10})(2\sin^2\frac{3\pi}{10})(2\sin^2\frac{4\pi}{10})\end{aligned}$$

提出2的乘方, 我們得到:

公式 (1)

$$4^3(\sin^2\frac{\pi}{8})(\sin^2\frac{2\pi}{8})(\sin^2\frac{3\pi}{8})+1=4^4(\sin^2\frac{\pi}{10})(\sin^2\frac{2\pi}{10})(\sin^2\frac{3\pi}{10})(\sin^2\frac{4}{10})$$

這種相近角度之間的正弦關係有一大堆, 也被我們導出來。

結語:

如果我們對一個人不甚瞭解, 但是對他的親朋好友, 左右鄰居, 能有一番認識, 那麼我們對這個人, 大概就不陌生了。

我們得不到 $\cos\frac{2\pi}{7}$ 的眞值, 我們也知道它的眞值不容易算出來, 但是我們可以利用 $f_3(x)$ $=8x^3+4x^2-4x-1=2^3(x-\cos\frac{2\pi}{7})(x-\cos\frac{4\pi}{7})(x-\cos\frac{6\pi}{7})$ 找到有關 $\cos\frac{2\pi}{7}$ 的一堆公式, 使我們對於 $\cos\frac{2\pi}{7}$, 能有更深一層的瞭解, 而我們最高興的是, 藉著一些巧妙的代數變換, 我們得到一大堆高中數學公式無法導出的漂亮公式, 這是最大的收獲。

更感謝的是黃大原教授, 張鎮華教授熱忱的指導, 由心裡感到交大應數系的溫馨。

參考書籍

1. 常庚哲教授著,「神奇的複數」, 九章出版社。

—本文作者李政豊任教於省立竹南高中, 錢閔蔚等三人則曾就讀於省立竹南高中—