

漫談高中數學新課程

余文卿

高中數學新課程於民國88年7月開始實施，取代目前國立編譯館印行的統編本的是民間出版的審定本，再次驗證了“合久必分”的名言。筆者曾多次應邀到高級中學做有關新數學課程方面的專題演講，也累積一些心得，現藉數學傳播，或能傳達出這方面的一些信息。

一. 新課程的特色與精神

1. 早期的數學教本

民國五十六年，筆者進入高中就讀，所用的數學教本是李新民與徐道寧等人所編寫的東華本；其主要特色是把數學抽象化，這樣的新教材使學生仿照唸國文或英文的方式來唸數學，課本習題中較缺乏深入的思考性計算題，取而代之的是一些概念題。學生喪失計算的能力，以致聯考中很多人數學成績掛零。

民國六十年左右，項武義教授提出了高中數學實驗教材，也結束了東華本的壟斷局面；這時市面上出現三種數學教本；實驗本、東華本與數理本。實驗本前兩冊由項教授執筆，第三冊以後由黃武雄教授接手，走的是高

程度路線，非常精簡，但高深莫測。如利用收斂的有理數列定出無理數，進而導出實數的一些運算性質。理論上完美無缺，但有多少學生能真正體會？東華本由徐道寧教授帥領一群清華大學數學教授執筆，仍擺脫不了之前東華本的抽象陰影，但已有實質改善，而數理本由師大教授執筆，適合中下程度的學生，較著重於例題的演練與計算。

民國七十二年所公布的課程標準，首次把統計納入高中教材，大大地提升了機率與統計在數學的地位，另一方面，也破例地把微積分納入高三的理科數學與商科數學中，談到的是一些簡單的理論與公式。新版本由國立編譯館統一印行，連演習（上、下冊）與統合教材（上、下冊）算在內，總共有十冊之多。其中最後的五、六冊各有三種版本；理科數學、商科數學與普通數學。理論上，學生人手一冊教科書；但實質上，學生手上只有各校自編的講義或參考書；而教科書只是權充擺設的花瓶而已。

2. 新課程標準

八十四年度所公布的新課程標準刪除了積分的相關教材，而僅保留少部分的微分理論。取消了演習與統合教材；而五、六冊也縮減為甲、乙兩種版本，甲種版本供選考理、工、醫、農的學生選用，乙種版本提供選考文、法、商的學生選用。與七十二年所公布的課程標準比較之下，不難發現底下的一些差異。

(1) 一開頭就引入數學上的三個基本概念：邏輯、集合與函數。透過平面幾何的知識引出邏輯學上的充分與必要條件，介紹集合的聯集、交集與差集等基運算，以自變數與應變數的熟知概念引出正式的函數定義。當然，這不是首創，只是又復到民國六十年的編法而已。

(2) 把機率與統計的課程區分為兩段；較淺的前段列為高二的共同課程，而較深的後段則納入高三的甲種版本，而乙種版本則著重於實際的應用。

(3) 坐標平面上的平移與旋轉技巧被運用於探討一般二元二次方程式的圖形，也使圓錐曲線的理論更加完全。

(4) 新增二次方陣所對應之線性變換的討論；特別是任一線性變換皆可分解為旋轉、鏡射、伸縮與推移等四種轉換的合成。

(5) 加重了不等式與線性規劃的份量。

當然，新舊課程標準也有很多相同的地方。例如前四冊的基礎數學內容完全被保留下來，連先後的次序也無多大變化。五、六冊是變動最大的地方，目的在於延伸前面談過的主題；如坐標的平移與旋轉是承續自圓錐曲線；而機率與統計 (II) 也是較高層次的延續。

只有極限的概念與應用與矩陣的理論才是嶄新的主題。

3. 新課程標準的特色

每次課程標準一修訂，馬上會有人站出來指出其特色，如民國五十六年的課程標準太抽象化，民國六十二年的課程標準太難，民國七十二年的課程標準太亂；而現行的課程標準又如何呢？底下我們提出一些供大家參考。

(1) 銜接尚稱順暢。高中數學最大的問題是如何銜接國中的數學課程；有一趨勢非常明顯，國中的數學教材愈來愈容易，因而高中的數學課程勢必跟著簡單化。高一上學期是銜接的關鍵所在，觀察到新課程所安排的基礎概念，數與坐標系，級數與數列以及多項式，無一不是國中課程的後續教材。如此也自出設計課程標準人員的用心所在；使銜接國中數學教材亮無困難，這或許是課程標準的最大特色。

(2) 理論與應用並重。著重於應用的主題如三角函數、機率與統計以及線性規劃明顯地份量加重；而較理論的綜合立體幾何則遭刪除，只保留空間的基本概念，討論空間中平面與平面，平面與直線以及直線與直線的關係。又統計不再局限於理論，而著重於實例的處理。種種跡象皆顯示出新課程標準的走向是理論與應用並重。

(3) 教材平易化。如前面所提過，國中數學教材已漸簡化，沒有理由把銜接的高中數學教材標準訂得太高，因而一些主題已適度的簡化；如行列式的理論中，只談論二階與三

階行列式，而克拉瑪公式也限於解二元一次與三元一次方程組。圓錐曲線與直線的關係不再討論，自然不會接觸到錐線的切線問題了。

(4) 利用到小型計算機。有關指數、對數、三角函數與反三角函數的求值，不再局限於古典的查表與內插法，而可靈活運用小型計算機，按出所要的數值，這意味計算革新的時代已經來臨，而這只是一開端而已。其實一些繪圖的相關問題皆可透過適當的軟體，統計上的數據更可由電腦做出可靠的分析，未來的數學可能會更倚重個人電腦或小型計算器；這是前所未有的創舉，自然是新課程標準的另一特色。

4. 結語

觀察新的課程標準中，第五、六冊的甲、乙兩種版本的差異已不太大。甲種版本多了極限的概念與應用，乙種版本多了可有可無的幾何圖形，這顯示出訂定課程標準的人有意促使考生跨組考試；尤其是方便選考文、法、商的學生跨到理、工、醫、農。近年來，大學聯考中一、四類組（文、法、商）的數學考題有時甚至比二、三類組（理、工、醫、農）還難，這也表示沒有必要再堅持甲種版本一定要比乙種版本較難的傳統概念。世上的事常分久必合，希望不久的將來會出現單一的版本供所有學生選用。

二. 新舊課程差異的比較

1. 高中數學的內容

數學的天地非常廣闊，高中數學教材也涵蓋不少，但歸納起來，不外乎「數」、「形」與「函數」三大類，現分別說明如下：

(1) 「數」泛指代數方面的相關課程，包括數系發展、方程式論與線性代數。從大家所熟知而用於計數的正整數出發，加入零與負整數而成為整數系；考慮兩整數相除而得出因數與倍數的概念；定出有理數是兩整數相除的商，把有理數標示在數線上，雖然密密麻麻，但仍有許許多多的空隙在，這些空隙是無理數的所在。而實數包括有理數與無理數，可跟數線上的點做一一對應：數線上的每一點皆對應一實數，而每一實數也能在數線上標示出來。

即使解一般的實係數二次方程式，也發覺方程式不一定有實根，因而有引進複數的必要。複數是形如 $a + bi$ 的數，其中 a, b 是實數。引進複數後，使得任一多項式皆可分解成一次因式的乘積，這是代數基本定理的一主要推論。

方程式論包括解方程式與聯立方程式，解一次與二次方程式或一般的高次方程式，並從根與係數的關係探討根的性質；注意到一般五次以上的方程式並不能解出，故能解出的高次方程式只限於特殊形式，如1的 n 次方根可用三角函數表現出來。二元一次與三元一次聯立方程式皆有特殊的公式解，即所謂的克拉瑪法則，並有附加的幾何解釋。

線性代數涵蓋平面上與空間中的向量運算以及矩陣與行列式的基本理論，並談論二階方陣所對應的平面上變換。

(2) 「形」是泛指幾何方面的相關課程。歐基里德所著的幾何原本是古希臘人在幾何

學上的研究結晶，國中的平面幾何只是幾何原本中的部分結果而已。應天文、航海與土地丈量的需要而發展出三角幾何學，其目的在探討三角形的邊角關係。當然，免不了要定出三角函數。

高中數學所涵蓋的幾何學尚還有坐標幾何（或稱解析幾何）。坐標幾何是法國數學家笛卡爾與費馬分別獨立創建的。在平面上引進直角座標後，可把平面上的直線用二元一次方程式表示出來，而把圓、橢圓、雙曲線與拋物線等圓錐曲線用二元二次方程式表現出來；在空間中引進直角坐標，可把平面與直線的方程式用三元一次方程式表現出來。

(3)「函數」是泛指分析方面的相關課程；除一般所熟知的一次函數與二次函數外，在高中三年，陸續會介紹多項函數、指數函數、對數函數、三角函數與反三角函數。這些基本函數成為微積分處理的主要對象，在高三數學甲類也利用導函數探討多項函數的極值問題。

排除在上列三項之外的是機率與統計的相關課程，這包括排列組合理論、機率論與敘述統計。

2. 新舊課程標準的差異性

這次公布的新課程標準與民國七十二年所公布的，其間的最大差異是刪除微積分教材；基本架構重新調整，取消演習與統合教材，而五、六冊只有兩種版本供選擇，甲種版本供理、工、醫、農方面的學生使用，乙種版本供文、法、商方面的學生使用；兩種版本差異性也不大，只是甲種版本多了極限的概念與應

用，討論初步的微分。對內容實質的差異現在仔細分析如下：

(1) 新課程在開頭介紹邏輯、集合與函數三個數學基本概念，為使銜接國中課程能夠順利，特別透過平面幾何知識引出邏輯中的充分與必要條件。

(2) 新課程引進不面坐標的平移的與旋轉技巧，以確定一般二元二次方程式的圖形；使圓錐曲線的討論不再局限於標準式。

(3) 在新課程中，考慮二階方陣所對應的線性變換，並加以分解為旋轉、鏡射、伸縮與推移四類，用於討論平面圖形的變化，非常方便。

(4) 新課程中加重線性規劃問題的份量。數學上的線性規劃是作業研究的一大主題，而作業研究又是工業工程的一大主流。在舊課程標準中，線性規劃只是附屬於二元一次不等式圖形的一小節，現在獨立成為一章，專門探討兩變數的規劃問題的意義、原理及方法。

3. 新舊課程標準的相似性

大體而言，舊課程標準中的基礎數學（共四冊）內容完全被保留下來，連次序也沒有多大變動；三角函數的份量加重；而機率與統計理論依內容深淺而區分成兩段式，前段列為高二的共同教材，後段列高三的選修教材而其中的乙種版本則加以簡化。現在提出一些更動的部分：

(1) 有關指數、對數與三角函數的部分，新舊課程標準相近，只是新課程納入反三角函數的介紹，並於複數的極式之前介紹平面

上的極坐標。注意到複數的極式在舊課程為一章,現被濃縮為一節,但其重要性仍不能抹滅。

(2) 向量、行列式、一次方程組與矩陣等線性代數的教材,新舊完全一致,只是行列式的理論限於二階與三階。

(3) 圓與球面方程式以及圓錐曲線新舊課程完全相同。在新課程中,透過平面坐標的

平移與旋轉定出二元二次方程式的圖形。

(4) 舊課程中的綜合幾何遭刪除,其中部分內容納入空間中的基礎概念,特別是空間中,平面與平面、平面與直線以及直線與直線的關係討論被保留下來。

—本文作者任教於國立中正大學數學系—