

數學畫

石厚高

很偶然的看到 1994 年十一月號 Scientific American 的艾希的隱喻 Escher's Metaphors 小標題是「艾希畫作表達了數學與科學的抽象觀念」(The prints and drawings of M.C. Escher give expression to abstract concepts of mathematics and science.) 它的圖案很漂亮迷人, 蘇東坡說“觀摩詰之詩詩中有畫, 觀摩詰之畫畫中有詩”, 改成“觀艾希之畫畫中有數學”是很允當的。又想起二十多年前, 在台北市南海路美國新聞處開畫展的洪通, 他的畫作十分鄉土, 而本文圖案十分數學。我仔細看過, 覺得有益於數學抽象概念的了解, 所以寫下重點與感受。美國新聞處就是現在的美國文化活動中心。

原文很長只能擇其「重要者」或「我喜歡者」或「數學味兒」重者而談之。艾希 Maurits Cornelis Escher 畫作十分細膩又準確, 讓人懷疑是電腦作品, 用手畫出來當然不是「妙手偶得之」, 完全是天才又加上幹勁兒, 只有幹勁兒是作不成的。八幅畫作都有解說, 解說也都很有數學, 想必是作者 Doris

Schatischneider 所寫, 艾希既然數學很爛 (poor) 當然寫不出來這麼「數學」的文字。

這種圖猛一看很像透視圖, 細看又不是, 透視圖在西方國家早就有了, 就像我國從前的「界畫」一樣而風格大異, 以線畫、版畫為最多。界畫是用界尺作畫, 畫成宮室樓臺, 本來是木工、木匠的行業故又稱匠學。直到十八、十九世紀法國藝術學院多流行水彩畫。進入廿世紀更是諸子爭鳴百花齊放, 有的用水彩、有的用不透明廣告顏料、有的用鉛筆、炭筆。六十年代以後更流行用針筆、噴筆來畫透視圖, 表現出一種特有的現代感。這種圖建築商用得最多, 他們都是找設計師事務所繪製, 一幅圖寬度大約是中學教室黑板寬度的一半, 高度大約是中學教室黑板高度的一又三分之一, 一幅圖幾個人畫要花上十天半個月, 收費五、六十萬或六、七十萬不等, 為甚麼這麼貴, 因為房子賣不賣得出去和這張圖有很大關係。

我很喜歡艾希的畫, 可是我說不出理由只是欣賞。讀中學時我不喜歡美術課, 美術常得丙, 我座位旁同學有時看不過去了, 常要強迫給我改改就得乙下。可是我喜歡報紙上的一些插圖, 尤其是副刊如聯合報、中國時報,

有些插圖畫得很細膩，不乏光著屁股露著奶子，看來很是賞心悅目，一點也不引人遐思，更沒有猥褻感。有林崇漢.. 太多了，記不得許多名字。有些我剪下來集成一冊，偶而會拿出來欣賞一下蠻愉快的。

艾希 1898 年生於荷蘭 Leeuwarden 鎮。是個土木工程師的最小兒子，雖然三位兄長走的都是科學或工程之路，他可是個數學很爛的學生。由於高中美術老師的鼓勵，他變得對平面藝術有興趣，首先作刻膠版畫 (linoleum cut)。

終其生艾希常提到他對數學的無力感，他說自己 “對講究精確的科學是一竅不通”。可是從小他就對秩序和對稱 (order and symmetry) 著迷。著迷到去西班牙 Granada 的 Alhambra 去學鋪瓷磚圖案，在數學論文裡找幾何畫，終於在瓷磚畫作上走出自己的路。

艾希留意瓷磚組合畫作的著色，搶在數學家與結晶學家在色對稱 (color symmetry) 領域作品出現之前。他的作品現在常被用來詮釋這些觀念。他的作品激盪人心，數學家與科學家有強烈共鳴。他作品的主要衝勁是 “對存在於我們身邊自然幾何律的敏銳興趣”。用平面圖表示他的想法，對科學上重要構想他提供了引人注目的視覺隱喻。

他能在不起眼的事物裡辨識引人注目的視覺效果—從不尋常的觀點來看紀念建築物的建築細節，小村莊大雜院樓梯間光影的取景，密接於山坡的房子綿延至遙遠山谷，小至要從放大鏡來觀察的自然界瑣事。在他的工作室裡他會把這些草圖變換成木刻與石版畫。

作品的精神幾乎都是發自心靈的觀察而不是肉眼的目視。他尋求把構思用視覺來表達，對人類觀察與了解意味模糊之處作詮釋。這時他發現自己在一個被數學控制的世界裡。

艾希著迷了，幾乎是沉溺於「平面的規律分割 (regular division of the plane)」。他一生著色畫作超過 150 多幅，在創作圖裡把圖案一再的重複鋪滿平面，證實了他的天才。這些作品說明了形形色色的對稱，可是對艾希來說平面分割也意味著捕捉無限 (capturing infinity)。在作品 “Triangle System” 裡用蝴蝶作地磚原則上是能無限制的連續，可也就提示了無限，艾希的挑戰是把 infinity 界定在一張紙上。他也指出任何人一投入 infinity 就無法全身而退。

在完成了幾件「逐漸接近中心消失點，圖樣愈來愈小」的作品之後，艾希在找出一種能在反方向描繪愈來愈小的設計。他想要圖案不斷重複不斷逼近可就是永遠達不到圍繞的邊界。1957 年數學家 H.S.M. Coxeter 送給他期刊論文再版本，文內他說明平面對稱用了幾個艾希的畫作。期刊裡有個讓他十分震驚的圖樣，由三角形組成的雙曲棋盤形鋪嵌，正是他要找的感覺。仔細研究過圖樣，艾希看出了鋪磚規則，圓弧和圍繞圓環的交角都是直角。以後三年他有四幅版畫都是這種棋盤格的型，Circle Limit IV 是其中最後一幅。

四年後艾希自己作出來了，把 infinity 放在矩形裡。他的遞迴算則 (recursive algorithm) 一組方向重複應用於一件物品，結果產生了自我相似的圖樣，物品互有關連，只

不過大小有成比例的改變罷了。艾希給 Coxeter 一份 underlying grid 的素描又道歉說：我擔心從你們數學的觀點來看，這個題目不是很有趣，因為它真的是像個平面拼圖。然而要找個過得去的方法，來了解這個題目用最簡單可能的方式，是件頭痛的事兒。

說來奇怪，自我相似的模式提供了很多圖樣的例子，它們是零星的、碎形、維，一種艾希很受用的曖昧意味。艾希老實說，能不嘲笑我們的成見嗎？例如故意弄混了二維與三維、平面與空間、嘲弄重力，真的是大樂事。在畫作 Day and Night 裡，農田不可思議的變形成了三維天鵝。他也高興的指出曖昧與否定是科學實踐時本來就有的：結合兩種景觀視為一體。

艾希於 1972 年去世前不久很感性的說，我最高興和數學家的交往與友誼，他們常給我新的概念，有時我們甚至互有影響。這些有學問的先生女士們是多麼的討人喜愛呀！

我寫完了「艾希的隱喻」把原文拿給女兒看，要她說說看我為甚麼喜歡艾希的畫，她居然有艾希畫冊 THE WORLD OF M.C.ESCHER，這是部道林紙精裝鉅著，不計封面與封底，長、寬與高各為 29.7、11.5、2 公分，計 263 頁。她喜歡繪畫、藝術，這本畫冊我更是喜愛，比起 Scientific American 上的插圖要精美多了，我的眼界大開，更以我父女原來有共同喜好而高興不已。

女兒說撇開數學的原理不談，艾希的畫作引人進入一個和諧、規律卻又充滿變化的世界，沒有壓力地在畫中世界遨遊，時有令人驚訝的發現，是喜悅，也是享受。

這本書第 5 至 54 頁有五篇文章，看過才發現原來艾希是這麼重要的人物，在台灣從來就是未之有聞，也許報章雜誌有過報導，不過三十六年來我是很注意中文報章雜誌的，我沒看到大概就是沒報導了，我想這麼一位世界級擺盪於數學與藝術之間的數學畫家，應該讓國人多多認識，所以把本文篇名「艾希的隱喻」改成「數學畫」。下面簡介 THE WORLD OF M.C.ESCHER 的五篇文章。

(1) J.L.Locher “The Work of M.C. Escher”

傳統藝術界對艾希作品持某種程度之保留，沒有受到高度敬重。對他畫作掌握繪畫技巧的絕妙原創性給予肯定，可是他的作品被認為太理性而欠缺感性。

雖然目前社會藝術與科學之間有明顯鴻溝，艾希作品在科學家間可是國際馳名。早在 1951 年 STUDIO、TIME 與 LIFE 雜誌都有文介紹他，使他揚名國際。1954 年九月他的作品在阿姆斯特丹 Stedelijk 博物館展出時，正巧國際數學家會議也於同地舉行，這份兒因緣際會是科學界仰慕他的開始。

展覽會空前成功，他認識了很多科學家與理論家，以後就常獲邀請去講他的作品。科學家為艾希作品著迷，一致認同不僅是艾希對他所熟悉世界的想像，也是大家對那個世界的相似想法。對艾希和他們來說，世界多元化表示的既不是荒謬也不是混亂，而是尋求現象間邏輯關係的挑戰。首次面對艾希作品的奇特感或荒謬感經過分析就能解釋了。這是艾希作品使人著迷的主要源頭，作品中的

真實 reality 是了不起又是可以了解的 comprehensible。

這篇文章長達 23 面，歸納成四項重點：

艾希作品裡把指定結構與可辨識世界起了交互作用，在 1937 年之前，這個可辨識世界像個起點，某結構要達到的起點。可是 1937 年後這個結構成了起點，利用可辨識的主題可以看得。

艾希的結構主義，主要是表示輪廓線連繫與空間連繫，二者都關注多元世界裡視野的交互作用。

世界多元化的想法，也是現代藝術的主流，可就有以下差異。艾希作品裡世界多元化並不意味混亂 (chaos) 而是秩序 (order)，他絕不只是關注多元結構，而是結構與可辨識主題間的交互作用。

對世界多元化的想法，看成是找出現象間新的邏輯關係與挑戰，再加上結構與說明的唇齒相依，在科學家與芸芸眾生間帶給艾希穩固名聲，一般來說這些芸芸眾生對現代藝術都欠缺興趣。

(2) C.H.A. Broos “Escher : Science and Fiction”

艾希早期五十多幅作品，是為荷蘭中學教科書以及一篇為結晶學論文作插圖。艾希繪畫大部份應用於自然科學，某些作品是數學教材插圖資料是很明白的。不但數學家、結晶學家還有其它科學領域研究人員，也使用艾希作品作插圖。邏輯發展與了解的結合，使某些作品對抽象理論的視覺與說明，能當作最適合的假說 (hypothetical) 模式。

數學家 Herman Weyl 在他的著作對稱 (SYMMETRY – Princeton, 1952) 裡生動的描述，利用對稱，人類 “數世紀來試著去了解秩序、美與完美 (order, beauty, perfection)。” 在數學、藝術與描述事物時，對稱的想法常是有益的起始點。對艾希來說，對稱涵蓋於平面的規律分割中，也是主要的靈感之源。所以 Weyl 著作的俄文版用艾希的畫來作封面也就毫不足怪了。

一幅艾希的畫居然採用作量子力學的插圖，因為他用了對稱的原理。物理學家也是諾貝爾獎得主楊振寧把一個新的假說公式化用到了對稱。關於這一點他說 “在量子力學絕無可能過度強調對稱的重要性”。這個假說從一般認定物理律的左右對稱，進一步說明發生於某些基本粒子的偏差，為了闡明給眾多的外行，楊振寧用了艾希作品騎士 (Horseman)，在 H. S. M. Coxter 與 C. H. MacGillarry 的著作裡談到騎士的數學性與結晶性的趣味。平面的規律分割導入亮與暗的對比，騎士交互向左向右，原來的與鏡像 (the original and the mirror image) 並不全等。例如，讓騎士有同樣的顏色，因為他們有同樣的形狀，他們可以把輪廓在白紙上畫成黑色，可是有一半騎士是不同色的，鏡像就不一樣了需要修正。艾希指出黑騎士是亮騎士的鏡像，他在一個圓帶子上編排騎士圖案，所以黑騎士亮背景中改變了顏色，而鏡像又與原圖是一樣的。(我想這個圖讀者最好看看原書 168 頁下方，這段話就很清楚了) 這個特性讓畫作很適切的說明了一個事實，基本粒子實驗的結果，只有在作實驗時才

能複製, 一如既往, 在鏡像形式裡: 爲了得到對稱, 楊振寧說

用鏡反射結合物質與反物質運作的交替 (combine the operation of switching matter and anti-matter with a mirror reflection)

不過科學家很少用艾希作品, 只有在畫作與理論在結構上十分一致時才用。

科學家與藝術家曾用艾希作品圖示共有又相似的創作天賦, 科學家裡尤其是數學家有此雅好。數學家 D. J. Lewis 擷取數學解之美與艾希方式作比較, 他評論“像艾希先生的作品, 反應在代數裡最美麗的層面, 常會涵蓋系統化方法以及極天才的無中生有論證。” (Introduction to Algebra, New York, 1965)。前面的一些例子關注科學家、學者與數學家以科學方式詮釋艾希作品來尋求事實。可是反過來呢, 科學界給了艾希價值概念反應在他的畫作裡。他終生的興趣在對稱與平面的規律分割早在二十多歲就開始了。

(3) M.C.Escher “Approaches to Infinity”

艾希談藝術饒有趣味, 有些事讓人大爲震驚, 他們不是人類心智的發現或發明, 只是獨立的存在著。地球早在有人類之前晶體就已經在地殼上了。有那麼一天有位老兄在地上撿到一顆規律石頭, 或者用石器砸碎石塊, 有東西掉在腳下, 他撿起來放在手上一看他呆住了。筆者想起愛因斯坦說過, 他在沙灘散步, 撿到一粒貝殼, 他們都是很謙虛的。本文

在「艾希的隱寓」裡談的很多, 這裡就不多介紹了。

(4) G.W.Locher “Structural Sensation”

1963 年美國詩人兼文學評論家 Howard Nemerov 有專文透視艾希作品, 發表於專業雜誌 ARTIST'S PROOF 上, 題爲 The Miraculous Transformations of Maurits Cornelis Escher, 他說“不論是不是像它那個樣子, 它都是持久的全神貫注藝術。”這種執著的精神不僅侷限於藝術, 至少在科學上也一樣。作品兼顧現象與內涵, 就是艾希的作品爲甚麼吸引了那麼多科學家的主要原因。不論是科學家、社會科學家與語言學家, 他們關注的是藝術作品與本身作品間的某些相似性。

不論甚麼理由艾希作品使多人著迷, 提示了多項愉悅, 包括美學上的享受。一般說來畫展會場都是安靜、肅穆、莊嚴的, 可是艾希的畫展會場就大不相同了, 有的大笑享受畫作的某些特殊部分, 從畫作神交藝術家, 看到深獲我心之處所以大呼小叫討論其中發展。年輕人給長者解說。他的作品似乎有各種不同的解說, 全看個人感受, 對很多人來說, 最重要的是對建構感覺的或有或無的經驗。

(5) H.S.M.Coxeter “The Mathematical Implications of Escher's Prints”

G.H.Hardy 一度形容

“真正的數學”有著“高度的出人預料, 再加上不可避免與簡潔”

“real mathematics” as having “a very high degree of unexpectedness, combined with inevitability and economy”

用來形容艾希的作品也一樣恰當。他說自己「我敏銳面對周遭的謎，分析我作過的觀察，我與數學領域說了 bye bye，雖然在精確科學我毫無訓練或知識，可是我與數學家間比起自己的同行來說，有更多的共同點。」

和達文西 Leonardo da Vinci 與杜勒 Albrecht Durer 一樣，艾希極為欣賞五種 Platonic 立體，也就是正四面體、正八面體、

正六面體、正二十面體與正十二面體。「他們象徵人類期盼和諧與秩序，同時也追求十全十美，使我們敬畏又有無助感。正多面體不是人類心智的發明，早在人類出現之前，他們就已經在那兒了。」

(5) 文可讀性高，數學談的多，列舉了多幅作品解說詳盡。讀者最好能把畫作與五篇文章對照著看，更能與艾希在作品上心靈交會。本書附錄指出艾希有著作九種、他作詮釋的著作三種、出現艾希畫作的科學著作與論文計 69 種、評論艾希藝術論文計 28 篇。

—本文作者任教於建國中學—