上期演練試題解答

高一、高二暑期作業

羅 添 壽

1. C, D
2. A, B, C

說明: $\sim$「$f(x)=0 \Longrightarrow g(x)=1$」

$\Longleftrightarrow \sim$「$f(x)\neq 0$ 或 $g(x)=1$」

$\Longleftrightarrow$「$f(x)=0$ 且 $g(x)\neq 1$」

$\Longrightarrow f(x)\neq 0$ 或 $g(x)\neq 1 \Longrightarrow f(x)=0$ 或 $g(x)=1$

3. D
4. A

說明:

$$h(\csc x)=\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-1/\cos^2 x$$

$$\therefore\ h(x)=1-1/x^2$$

5. C
6. A

說明: $3<[3x-1]\leqq 6 \Longleftrightarrow 4\leqq [3x-1]\leqq 6$

$\Longleftrightarrow 4\leqq 3x-1<7$

$\Longleftrightarrow 5\leqq 3x<8 \Longleftrightarrow 5/3\leqq x<8/3$

7. E

說明: 設 d 為公差, $\because\ \alpha+\beta+\gamma=3\beta=\pi$,

$\therefore\ \beta=\pi/3$

$\sin\alpha\cdot\sin\gamma=\sin^2\beta$

$\Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-d\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+d\right)=\sin^2\frac{\pi}{3}$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos 2d-\cos\frac{2\pi}{3}\right]=\sin^2\frac{\pi}{3}$

$\Longrightarrow \cos 2d=1 \quad \Longrightarrow d=n\pi$ i. e. $d=0$

8. A, B, C

說明: (A) $a_n=\dfrac{2n+3}{5n+7}$, $\lim a_n=\dfrac{2}{5}\neq 0$, Σa_n 發散。

(B) $a_n=\dfrac{2n^2+7}{n+3}$, $\lim a_n=\infty$, Σa_n, 發散。

(C) $\because\ \dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{n^{1/n}}$ 而級數 $\Sigma 1/n$ 發散,

$\therefore$ 原級數發散。

(D) 因 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots$ 及

$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{5^n}+\cdots$ 收斂, 故原級數收斂。

(E) $\because\ a_n=\dfrac{3^{n-1}}{5^{2n+1}}=\dfrac{3^n}{3\cdot 5\cdot 25^n}=\dfrac{1}{15}\cdot\left(\dfrac{3}{25}\right)^n$

$\therefore$ 原級數為公比 $r=3/25$ 的等比級數, 故收斂。

9. B
10. A

說明:

$$\frac{x}{xy+x+1}=\frac{\log b}{\log abc}$$

$$\frac{y}{yz+y+1}=\frac{\log c}{\log abc}$$

$$\frac{z}{zx+x+1}=\frac{\log a}{\log abc}$$

$$\therefore\ k=\frac{\log b}{\log abc}+\frac{\log c}{\log abc}+\frac{\log a}{\log abc}=1$$

11. A, B, C

說明: 令 $a+b+c=2S$, 則可求出

$(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3$

$-3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$

〔註〕: 代特值 $a=1$, $b=2$, $c=3$, 也可得 $k=4$, 這是投機做法。

12. E

說明: 如圖: $C'D'=CD$

$BC' = AD' = BC\cos\theta = AD\cos\theta$

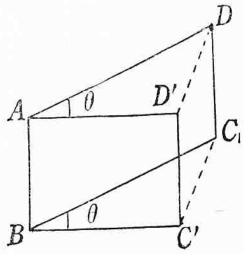
由 area□$ABC'D' = AB \cdot BC' = AB \cdot BC \cdot \cos\theta$

$= $area□$ABCD \cdot \cos\theta$

可推得橢圓面積

$=$圓面積 $\times\cos\theta$

$= \pi a^2 \cdot \cos 30° = \sqrt{3}\pi a^2/2$



13. D, E　　14. C

15. A, B, D

說明: $y = 1 + \cos 2x + 1 + \sin 2x - \sin 2x\cos 2x$

$= 2 + (\sin 2x + \cos 2x) - (1 + 2\sin 2x\cos 2x)/2 + 1/2$

$= (\sin 2x + \cos 2x) - (\sin 2x + \cos 2x)^2/2 + 5/2$

$= -[(\sin 2x + \cos 2x) - 1]^2/2 + 3$

$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\cos(2x - \alpha)$

$\Longrightarrow -\sqrt{2} \leqq \sin 2x + \cos 2x \leqq \sqrt{2}$

$\Longrightarrow -1 - \sqrt{2} \leqq \sin 2x + \cos 2x - 1 \leqq -1 + \sqrt{2}$

$\Longrightarrow 0 \leqq (\sin 2x + \cos 2x - 1)^2 \leqq 3 + 2\sqrt{2}$

$\Longrightarrow \dfrac{-3 - 2\sqrt{2}}{2} \leqq -\dfrac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x - 1)^2 \leqq 0$

$\therefore\ m = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2\sqrt{2}}{2} \leqq y \leqq 3 = M$

16. B

說明: $\cos(n\pi/100) > 0$, $\sin(n\pi/100) < 0$

$\Longrightarrow n\pi/100$ 是位在第 IV 象限的一個正角。

欲求合此條件的最小自然數 n，可先令

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{n\pi}{100} < \frac{4\pi}{2}$$

而得 $150 < n < 200$, 故 $n = 151$ 爲所求。

17. A, C, D, E

說明:

(A) area $\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & -8 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28$

(B) $\triangle ABC$ 之外接圓方程式爲

$7(x^2 + y^2) - 89x + 23y = 0$

(C) $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{33}{65}$, $\therefore\ \sin\theta = \dfrac{56}{65}$

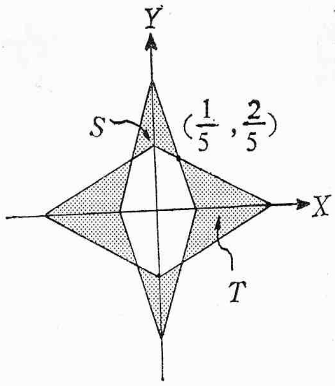
(D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 33$

(E) $\overleftrightarrow{AB}: 4x - 3y = 0$, $\overleftrightarrow{AC}: 12x + 5y - 56 = 0$

$\because\ \left|\dfrac{4x - 3y}{5}\right| = \left|\dfrac{12x + 5y - 56}{13}\right|$

$\therefore\ \triangle ABC$ 之內角 A 之平分線方程式爲

$8x - y - 20 = 0$



18. B

說明: 如上圖所示，令

$S: \begin{cases} |x| + |2y| - 1 \geqq 0 \\ |3x| + |y| - 1 \leqq 0 \end{cases}$

$T: \begin{cases} |x| + |2y| - 1 \leqq 0 \\ |3x| + |y| - 1 \geqq 0 \end{cases}$

則陰影部份之面積爲:

$$4\left(\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{11}{15}$$

19. E

20. B, C (如下圖所示)。