

談「校內段考」

王湘君

一. 前言:

北市某高中, 這學期高二第一次段考, 數學各班平均30多分, 大約每班只有一、二人及格, 及格的也不過是60多分, 可謂慘不忍睹。

命題老師原本對自己精心設計的考題, 抱以高度的期望, 沒料到學生考得這麼糟, 真是大失所望。就像一位大廚師, 上了一道拿手的佳餚, 客人非但不捧場, 反而嫌東嫌西, 廚師豈有不沮喪的! 大嘆學生不用功, 責怪他們太差勁, 甚至怪罪到教育當局的學年學分制, 沒有留級, 學生有恃無恐, 更不知努力求學, 以致程度每下愈況! 有一位老師提議重考, 因為學生沒讀好書, 再考一次, 可以讓學生有機會好好地再讀一次, 以補強前面所學的不足。但最後以加分來「粉飾太平」, 不過是美化「帳面」而已, 於事何補!

遺憾的是: 並未見到老師認真地檢討教學方法以及試題難易是否適中, 只是一味地責怪學生, 而學生因為考不好, 有挫折感, 影響日後學習的興趣和信心。校內的考試, 一再上演著同樣的戲碼, 所以引起我寫這篇文章的動機, 來探討試題怎麼出, 才算是一次成功的測驗!

二. 試題剖析

這次考試範圍包括: 平面向量、空間概念、空間向量, 與空間中的平面。試題分三大類, 一、是非題, 佔10%, 二、填空題, 佔80%, 三、計算證明題, 佔10%, 考試時間為70分鐘, 現在分題剖析如下:

一、是非題: 10%

- 1. 設 A, B, C 為相異三點, 過 A 恰有一平面與 \overrightarrow{BC} 垂直。
- ×2. 相異兩平面之交集可能為一線段。
- ×3. 設 O, A, B, C 為相異四點且 $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, ($\alpha, \beta \in R$)。若 A, B, C 三點共線, 則 $\alpha + \beta = 1$
- ×4. 設 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 為三向量, 則 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- ×5. 設 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 為三向量, 若 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ 且 $\vec{c} \neq \vec{0}$ 則 $\vec{a} = \vec{b}$ 。

評註: 只有第3題有陷阱, 必須注意 O 不能與 A, B, C 三點共線, 此定理才能成立。其餘的, 都是一看題, 就會答, 可惜學生平日讀書馬虎, 只著重公式的記憶, 對基本觀念不求甚解, 因此解答問題似是而非。

二、填空題:80%

1. 設 P 為 $\angle BAC$ 內部一點, $\angle BAC = 60^\circ$, $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$, $\overrightarrow{AP} = 9\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$, \overrightarrow{AP} 與 \overline{BC} 相交於 D

(1) $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, ($x, y \in R$) 則

$(x, y) =$ _____ (甲)。

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} =$ _____ (乙)。

(3) $|\overrightarrow{AD}| =$ _____ (丙)。

(4) $t =$ _____ (丁) 時, $|\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}|$ 有最小值 m , $m =$ _____ (戊)。

(5) 過 A 作 \overline{BC} 之垂線交 \overline{BC} 於 H , $\overrightarrow{AH} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$, ($p, q \in R$) 則 $(p, q) =$ _____ (己)。

(6) 建立座標系使 A 之座標為 $(3, 2)$, \overrightarrow{AB} 之方向為 x 軸正向, 單位長不變, C 在 \overrightarrow{AB} 上方,

(i) \overrightarrow{BC} 之坐標成分表示法為 _____ (庚)。

(ii) $\angle BAC$ 之分角線上之單位向量的座標成分表示法為 _____ (辛)。

答案: (甲) $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ (乙) -6 (丙) $\frac{\sqrt{133}}{4}$

(丁) $-\frac{3}{8}$ (戊) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (己) $(\frac{10}{13}, \frac{3}{13})$ (庚)

$(-1, 2\sqrt{3})$ (辛) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

本題屬於平面向量部分

(1) 解析: (i) $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AP} = 9\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ (已知), $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = 9k\overrightarrow{AB} + 3k\overrightarrow{AC}$

(ii) B, C, D 共線 $\Rightarrow 9k + 3k = 1$

評註: 標準考題, 是定理的應用, 但含兩個概念, 一般學生缺乏聯想力。

(2) 解析: 利用 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, θ 為 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角, 但須注意, \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CA} 夾角為 120°

評註: 基本題, 但也考核了學生是否細心。

(3) 解析: 利用 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

評註: 標準考題, 但本題為連坐題, 必須前兩題都答對, 才有得分機會。

(4) 解析: 有兩種解法: (i) 利用 $|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$ 及二次函數的配方

(ii) 利用 $\vec{a} + t\vec{b}$ 與 \vec{b} 垂直時, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 為最小。

評註: 標準考題, 可惜與 (2) 連坐。

(5) 解析: (i) 先用餘弦定理算出 \overline{BC} 長

(ii) 次用面積算出 \overline{AH} 長

(iii) 再用畢氏定理算出 $\overline{BH} : \overline{CH}$

(iv) 再用分點公式

評註: 計算繁瑣, 牽涉到較多的定理, 是綜合性的考題, 應以計算題來考。

(6) 解析: (i) 利用 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, 把 A 當原點, \overrightarrow{AB} 射線當作 x 軸正向。(ii) 方向角為 θ 的單位向量是 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 。

評註: 這是測驗學生的解讀能力, 以及組織能力, 是一般學生最弱的部分, 學生往往「小題大作」。

2. 設 $A(1, 0, 2)$, $B(3, 2, 3)$, $C(1, 1, 4)$, $D(1, 1, 1)$, $E(1, 1, a)$

(1) A, B, C, E 共平面, 則 $a =$ _____ (子)。

(2) $\triangle ABC$ 之面積為 _____ (丑)。

(3) 四面體 $A-BCD$ 之體積為 _____ (寅)。

(4) 平面 ABC 之單位法向量之座標成分表示法為 _____ (卯)。

(5) D 在平面 ABC 上之正射影為 H , 則 H 之座標為 _____ (辰)。

1. $\triangle ABC$ 中, \overrightarrow{AD} 垂直 \overrightarrow{BC} 於 D , \overrightarrow{BE} 垂直 \overrightarrow{CA} 於 E , \overrightarrow{AD} 與 \overrightarrow{BE} 交於 H , 求證: $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$

評註: 此兩題較簡單, 前者是向量的內積, 後者是用向量證明三高共點。

三. 成功的測驗應具備的條件

這份試卷裡, 沒有死代公式, 只重記憶的題目, 更沒有解題「絕招」才能解的題目, 命題的方式相當靈活, 可見命題老師的確下了一番工夫設計問題, 不像有些試卷, 一字不改地抄現成的試題, 學生只要背解答, 就能應付考試。而這份試題, 學生必須對教材徹底理解, 融會貫通, 並且要有良好的思維品質, 才能應考。這一點, 命題老師似乎高估了學生。個人認為數學的學習分為三階段, 首先是「點」的學習, 其次是把「點」連成「線」, 最後才是把「線」展成面。段考是評量學生對「點」的了解, 是「基本概念」的測驗, 所以綜合性的試題, 不宜佔太多比率。

以下是個人以為段考應掌握的方向

- 一、題意淺顯明白 —— 一個題目只問一個概念, 題意要淺顯, 沒有非數學的困擾。因為學生初學, 對教材根本不熟, 而老師浸淫在數學教學中二十多年, 不能以自己的標準來要求學生。綜合性的題目, 只能搭配著出, 讓程度高的學生, 有所發揮, 一個題目中若含兩個以上的概念, 若有一個不會, 整題就解不出來。
- 二、題組比率應減少 —— 題組型的試題本來可以測驗學生的連貫性與聯想力, 可惜得分會受到連坐影響, 有時一題答錯, 就

全軍覆沒, 另一項缺點是周延性不夠, 涵蓋面不廣, 容易遺漏某些重要題材, 此次佔 80%, 似嫌多些, 約 30% ~ 40% 即可。

- 三、掌握教材重點 —— 不要超出現階段所學的範圍, 要讓教, 學與測驗三項配合良好。命題應理論和計算並重, 演算不可繁瑣, 難易適中, 最好有基本送分題, 讓學生一看題目, 就能答出來。
- 四、配合學生學習的經驗 —— 教學是老師與學生的互動, 老師要掌握學生學習的脈動, 因材施教, 也要因材測驗。平時所學過的例題, 習題以及小考題, 在段考中出一些類似的問題, 讓學生有成就感。
- 五、成績要能呈現學生的程度 —— 段考不是聯考, 也不是競試, 試題要適合學生的程度, 不宜太深太廣, 以致打亂了他們學習的陣腳, 要讓認真讀書的人, 考得好, 要能鑑別出各種程度的考生。如果大家的分數, 都壓縮在一個小區間內, 那考試的意義又何在?

四. 結語

「段考」是校內定期評量學生階段性學習的成果, 老師應在教學範疇內命題。題目的型式與難易的程度, 應審慎分配使教與學的結果, 確實地展現出來。切莫以為段考只是一次小考而不重視, 隨興出題。不良的試題, 會打擊學生的信心, 甚至放棄學習。盼老師出題時, 要謹慎為之。

——本文作者曾任教於師大附中, 現已退休——