

中國數學課程的演變

林炎全

一、引言：

最近教育改革的呼聲甚囂塵上，課程改革是教育改革的重要部份。我們可以感覺到中央主管教育機關—教育部對這項工作的重視；以及投入龐大的人力和物力，進行中小學課程的研究和修訂。現在修訂的新課程標準已經頒布，各級學校將擇期實施。我們衷心祝福這次修訂的新課程，能順利成功地實施；但是不奢望這次修訂能夠一勞永逸。因為學校的課程，必須配合社會環境需求而改變。現代社會改變的步調很快，學校課程的研究和修訂，自然成為經常性的工作。修訂課程，要考慮的因素很多。例如學習心理、科技進展、文化背景等等。我們從歷史過程切入，探討過去歷代數學課程的演變。希望能在歷史的故紙堆裡，篩出一些有用的東西。

討論數學課程的演變，我們將中國歷史分為先秦、秦漢、魏晉南北朝、隋唐、宋元、明清及民國等七個時期。這樣的分段，是以分裂戰亂時期為分割點。先秦和秦漢之間，是戰國時代；魏晉南北朝本身就是分裂的時期。隋唐與宋元之間，則有歷時不長的五代十國。明朝時期，是西方優勢文化潮初漸；到清末是潮滿時期。就數學課程而言，西方的數學課程，

此時逐漸取代中國原有的。所以我們把明清劃為一個時期。最後，我們歸納出這個歷史過程的特徵，並為它們推測原因。

二、先秦時代

初民時代，日常生活簡單，對於數學的需求不多。如「禮記」內則所說，小孩六歲學數數（一至十）與辨方位（東西南北中）；九歲學六甲（天干地支）；（男孩）十歲負笈訪師入學，學六書（書法）九數（方田、粟米、差分、少廣、商功、均輸、方程、贏不足、旁要）；十三歲開始學樂誦詩和射御；二十歲學禮；三十歲有室（婚娶），授田服役；四十歲開始任官；五十受命為大夫；七十告老。這是官宦人家男子的人生歷程。十歲所入為小學，二十歲入大學。所以最高等級的數學課程內容，應是九數。這九數逐漸演化，到秦漢時代，成為具形的「九章算術」(李繼閔,1990)。所以周朝大學並沒有數學課程；事實上，更早的虞、夏、殷，不論大學小學，都是在崇四術（詩、書、禮、樂）、立四教（文、行、忠、信）；可能當時還沒有“九數”。至於女子，七歲開始與男孩不同席不共食；十歲起不出大門只在家裡學女事。等待二十歲，最晚二十三歲出嫁。對於需主中饋

的家庭主婦(內則:男不言內),只會數一至十當然是不夠的。與女事相關的算術,可能在學女事時一併學習。她們所能學到的數學,應是內藏在生活經驗裡。平民教育,虞、夏、殷都沒有“數”這一項。周朝時代,以三物教萬民,三物就是六德、六行和六藝;六德指知、仁、智、義、忠、和;六行是孝、友、睦、淵、任、恤;而六藝則包括禮、樂、射、御、書、數。六藝裡的數,是否與國學的九數一樣?不得而知。三代以前,教育特別注重禮樂和德行;辦教育的目的在節民性興民德,以防民衆流於虛浮和淫佚。算術對於這個目的所能提供的貢獻,明顯的不如禮樂道德與典章制度;教予過多的玄思,反而有害。數能廁身六藝之末,或許是實用價值高,生活中少不了它。鄉學所教的算術,可能只是四則運算;最多也再學一些與所從事的行業有關的數學;例如耕種的農人或買賣五穀的商人,可能會學九數中的粟米換算方法。迄今,我們仍然用“運籌帷幄”來形容異稟能人;可見能操作高難度籌算,如開方、解方程的人,在古代是很稀有的。在孔子倡導平民教育,厲行有教無類以前,中國教育的階級性是很強的。大學小學又稱國子學,只有王太子、王子、群后之子、公卿大夫、元士之嫡子才有資格就讀(「尚書」大傳)。至於鄉學,雖然是平民教育,但真正有能力,且有意願把小孩送到學校讀書的,畢竟是少數。大多數人,數學學習是伴隨生活,以口耳相傳的方式進行。九九歌訣可能是主要的課程內容;九九歌訣就是倒了順序的九九乘法表,相傳是伏羲氏發明的(李人言,民72);但伏羲是否真有其人,到現在還是疑問(王仲孚,民77)。西

漢文帝韓嬰所著「韓詩外傳」卷十,有一則故事說有人把九九歌獻給齊桓公以示才學;齊桓公問九九歌也能表示才學嗎?那人回答說九九歌確實夠不上什麼才學,但是如果王上能禮遇像我這樣平凡的人,必能得天下人才。可見九九歌在很早以前,已經是很普遍的東西(李兆華,民83)。殷商以前文字還沒有成型,古書上與它有關的記載,傳說成分較多。像九九乘法歌訣這種與日常生活切近的東西,不大可能是某人在一夕之間發明出來的。

春秋戰國時期,政治、經濟與社會起了劇烈的變化。舊制度的解體伴隨思想開放的風氣。因而諸子並起百家齊放,形成學術思潮的高峰期。在教育制度方面,則是官學沒落與私學興起,養士之風盛行。孔子提倡平民教育,有教無類,並以六藝教人。但是孔子的六藝,指的是詩、書、禮、樂、易、春秋;並不是一般所說的禮、樂、射、御、書、數(伍振鷺,民74)。從他的言談之中,可以看出孔子關切較多的是禮樂詩書;與數理關係密切的易,則較少提及。一般而言,儒家系統裡的人物,如孟軻、荀況,都與孔子持類似的態度(王仲孚,民77)。總之,儒家關注的焦點在德行修為;墨家則是務實的實踐主義者,他們比較關注厚生利用。墨家除倡導兼愛、非攻、節用、薄葬等學說,並且挺身為自家的學說辯護;同時設計製造各種器械,力行他們的學說。所以墨家弟子必須學習不同的專長;有善於說書的,傳布他們的學說;有擅長談辯的,為他們的學說辯護;有專門從事的,製作器物或工事。這些都需要特殊的專長,如辨說能力,邏輯能力,設計計算的能力等等。「墨

經」裡，對於許多幾何名詞，給出形式的定義；例如：“平，同高也”；“中，同長也”；“圓，一中同長”等等（「墨子」經上第四十）；也討論到許多邏輯觀念，如“以牛有齒馬有尾說牛之非馬也不可是俱有不偏有偏無有曰之與馬不類用牛角馬無角是類不同也”（「墨子」經說下第四十三）。墨家為許多口語常說的幾何概念，做形式上的定義，看起來好像畫蛇添足，多此一舉；但在建立論理體系的工作上，卻是很重要的一環。孔子強調過正名的重要；他注重的是名分與實際的應符，防止潛越，以求得政治上的安定（王仲孚，民77）。墨家是否受到儒家的影響而注重基本定義？我們不得而知。

三、秦漢時期

秦漢時代，在政治上中國是一個統一的局面。秦始皇厲行書同文車同軌，各種法度權量律曆，皆天下劃一。這些措施，有助於思想的表達和流通。但秦代採行以吏為師（伍振鷺，民74），學術活動及思想，會受到政治考量的限制，難有突破性的發展。更糟糕的是焚書坑儒，澈底摧毀學術的生機。漢武帝即位，採行董仲舒的建議，罷黜百家獨尊儒術；設太學於京師，也鼓勵地方設立郡國學。明帝為外戚樊氏、郭氏、陰氏、馬氏開四姓小侯學；靈帝置鴻都學門（陳原東，民69）。在政府的倡導下，讀經成為主流風朝；五經（詩、書、易、禮、春秋）博士是最有出路的身份。與周代的國子學相較，漢朝的官學課程，顯然窄了許多。周朝的教育思想，注重德行道藝的訓練，配合生活實踐。小學教以灑掃應對進退之禮；大學教

以六藝及修己治人之道（任時先，民76）。漢代的官學則以養士，即培養做官的人才為目的。如何通過歲試求得功名，是入學讀書的主要目標。這種考試競爭的程度，甚至到了“每有策試，輒興諍訟”的地步（陳東原，民69）。從此可以看到考試影響教育，自古已然。官學的課程，自然會受到官方態度的影響。取士有明經科而無明算科，九數不再在官學課程裡。

漢代另有一個教育系統：私學。書館和小學是啟蒙教育，學識字讀字書；而後入官學讀經。但是有時限於機會，有時礙於旅程遙遠；有些學生會繼續留在私塾，接受與官學平行的教育（陳東原，民69）。「前漢書」食貨志：八歲入小學，學六甲，五方，書計之事。宋王應麟解釋書計是指六書九數，並與禮記內則所載比較，認為這些都是在八歲學完（引自陳東原，民69）。如果“計”是指九數，則其難度實在超過八歲的小孩所能甚多。即使到現在，教育如此普遍，八歲才小學一、二年級，九九乘法都還沒有接觸到，如何操作諸如開平方、開立方或解方程之類的高難度的籌算過程？其次，依所列的六甲五方六書九數，即使沒有其它的課程，也不可能在一年內學完。食貨志所載的尚有“始知室家長幼之節十五入大學……”。所以這些可能是在十五歲入大學之前學完。

雖然算經沒有列在漢朝官學課程裡，中國數學經過漢朝的經營，開始有具形的基礎。「周髀算經」相傳是漢趙君卿所撰。研究「九章算術」的風氣，以漢代最盛（趙良五，民80）。「數術記餘」是漢徐岳所著（趙良五，民80）。許商、杜忠著有「算術」一書（李人

言,民72)。漢室劉向的兒子劉歆,是中國最早求圓周率的數學家;他所算得的圓周率是3.1457(趙良五,民80)。從這些成就,可以看出當時研讀算學風氣是很盛的。食貨志所說的四民:學以居位曰士、闢土殖穀曰農、作巧成器曰工、通財鬻貨曰商。入官學主要的是想當官的。其它將從事耘農從工或經商,可能留在私塾學習專業課程;這其中應有其相關所需的數學。尤其是要學作巧器或通財貨,都需要精確的算法。劉歆要計算更精密的圓周率,或與此有關。鄭玄是出名的「九章算術」通(「漢書」列傳),也是留名歷史的私學創辦人(陳東原,民69);我們無法想象他講學的內容與數學無關。

四、魏晉南北朝

魏晉南北朝的政治場景與春秋戰國相類似—征戰連年。在朝廷是一幕幕權臣篡位,政權更替如趕場;一般人民沒有久安的日子,生活自然不好。在這種情形下,政府沒有辦法騰出很多的資源來辦教育,官學因而沒落。春秋戰國時代,以養士羅致人才。養士的風氣促成學術思想開放,因而百家並興,形成學術史上的一個高原期。魏晉南北朝,則以中正察舉為主。這種制度施行久了,流弊叢生。豪門巨室牽朋引伴,阻斷一般平民仕進的路。所以這個時期,無法像春秋戰國那樣,開創一個學術的春天。唯一值得一提的是玄學的興起,與儒學、史學和文學合稱四學。從短期的社會現象看,玄學崇虛無倡無為,於世道人心,都有不好的影響。但從長期學術觀點看,改變了儒家

獨占正統教育的局面,也可以說是一種進步(伍振鷺,民74)。檢視這個時期數學發展的成績單,似乎可以看出這種玄思清談風氣的影響力。這個時期重要數學家的成就及著作如下(趙良五,民80):

劉徽:注九章;自撰重差附於九章。到唐代釐定算經十書時,將它獨立出來,為「海島算經」;用割圓術算出 $\pi = 3.1416$ 。

張邱建:撰「張邱建算經」。

夏侯陽:撰「夏侯陽算經」。

甄鸞:撰「五經算術」。他曾給「周髀算經」、「九章算術」、「孫子算經」等等做註釋。

祖沖之:撰「綴術」。他曾算出 $\pi = 3.14159265$ 比西方的結果早一千多年。

祖沖之:發明祖氏原理,即卡瓦萊利原理。

庾曼倩:疏注「算經」(李人言,民72)。

高元:撰「算術」(李人言,民72)。

此外尚有「五曹算經」,不知作者是誰;推測可能是後魏北周之間寫成的(趙良五,民80)。「孫子算經」的作者和成書年代無從得知。錢寶琮認為其原著的年代是公元400年前後(錢寶琮,1963),大約是東晉時候;董泉的「三等數」至少在甄鸞的時代已經成形,因為甄鸞曾為它作註釋。算經十書之中,除「緝古算經」外,至此已經都露臉了。

五、隋唐時代

隋朝歷時甚短，未及三十年。但是有兩件事值得我們注意：(1) 算學正式列名國子寺下五學之一。以往國子太學，最多只有儒史文玄。隋文帝設的國子寺，由國子祭酒統制。國子寺下含國子、太學、四門、書、算五學；算學的編制員額有博士二人，助教二人，學生八十人（「隋書」百官志）。(2) 科舉制度的興起。隋煬帝大業二年設進士科，為盛行中國一千三百多年科舉制度的開頭。如前節所述，到隋朝算學書籍已經很多，足夠獨當一面，自成一個學門。算學課程內容為何？不得而知。唐朝許多制度都是仿照隋朝。「新唐書」選舉志上所說：算學的功課，「孫子算經」、「五曹算經」共修一年；「九章算術」和「海島算經」合計修三年；「張邱建算經」和「夏侯陽算經」各修一年；「周髀算經」與「五經算術」共修一年；「綴術」修四年；「緝古算經」修三年；「數術記遺」和「三等數」也得一并學習。除了「緝古算經」，隋朝的數學課程，應與唐代相去不遠。歷經魏晉南北朝的分裂與動亂，到隋朝復歸統一。社會得到生息，工商逐漸興盛。而隋煬帝開鑿運河，更需要大量會測算的人才。數學課程，應占有相當的分量。煬帝開進士科，就是為了求才於學校之外（陳東原，民69）。

唐代的教育，到唐太宗李世民而燦然大備。隸屬國子監的直系學校有：國子學、太學、四門學、律學、書學、算學，還有存在時間較短的廣文館。算學學生三十人，限八品官以下的兒子及庶人精通算學的（「新唐書」選舉志）；配置官員博士二人，官等是從九品下；另設助教一人掌教（「新唐書」百官志）。唐

代科舉，有明算一科。科考的試題，一部份是申論問答，必須說明造術的術理；這類考題有十題，其中「九章」三題，「海島」、「孫子」、「五曹」、「張邱建」、「夏侯陽」、「周髀」、「五經」各一題。另外「數術記遺」和「三等數」考填空（帖讀）十道，前面十題通過六題，後面十道對九道為及第。還有一種標準是試論「綴術」和「緝古算經」造術的術理，考「綴術」七題和「緝古算經」三題；另外「數術記遺」和「三等數」考填空（帖讀）十道。前面十題通過六題，後面十道對九道為及第（「新唐書」選舉志）。唐朝的數學教育，有兩點值得我們注意：(1) 算學在國子監體系裡，位階並不算高。學生的出身與律學書學一樣，都是八品以下及庶人子；算學博士的品級，與書學一樣，是九品中正裡最低的從九品下。古代把算當做是一種“術”，是屬於技術層次的，自然不適合於上品的官家子弟。(2)「緝古算經」係跨越隋唐的王孝通所撰。他在上「緝古算術」表中說：…代乏知音終成寡和…。但是他的書被採用做官學必修的教材，能與許多知名的古代算經分庭抗禮（見前述的科考評準）；他的抱怨應是另有所指。從這點，可以感覺到唐朝時代的人，對於新的東西和技術，頗能接納。這可能是託算學位階不高之福。設若算學被當做與立國意識或立身修持有關，恐怕得經過長時間的洗練察看，才有可能進入官學和科考。

學校與科舉，本來是功能不同的體系。學校的功能在培養人才，涵育氣質和灌輸知能並重；科舉則是選拔人才的制度。到唐朝中葉以後，學校漸受科舉的影響；學生都全

力專注於準備科舉考試。參加科舉考試，並不一定由學校薦舉；一般平民，也可以由州縣貢舉。不論官家或平民，科舉成為讀書的主要動機。既然算學是科考的一門，自然就會有人投入。「隋書」經籍志和「唐書」藝文志所列與算學有關的書籍相當多；「隋書」還列出一些從印度傳入的算書，如「婆羅門算法」、「婆羅門算經」；「唐書」所列的，大多是科舉考試的範圍。李淳風注釋許多算學書籍，都是在算經十書的範圍之內，即科舉要考的範圍（李人言，民72）。另外有幾部算書，從書名上看，好像與十部算經關係較遠如：僧一行的「心機算術括」（「舊唐書」列傳）；陳從運的「得一算經」；江本的「一位算法」；龍受的「算法」（「新唐書」藝文志）。

六、宋元時期

唐後五代十國歷時五十餘年，政治權力更替頻仍。各代雖然都維持有學校和科學的形式；但是有的無心，有的無力，並沒有把它們辦得很上軌道（陳東原，民69）。有宋一代，算學在官學中的處境，可以說是載浮載沉；宋初的國子學，不論員額學生，規模都很小。課程範圍也很有限；只授經術。崇寧三（西元一一〇四年）年設算學，距趙匡胤建宋（西元九六〇年）已經一百四十多年；崇寧五年罷算學，附於國子監；這年十一月，又恢復算學。大觀四年（西元一一一一年）把算學并入太史局；正和三年（西元一一一三年），又恢復算學（劉伯驥，民60）。課程內容以「九章」、「周髀」及假設疑數算問為主；另外兼習「海島」、「孫

子」、「五曹」、「張邱建」、「夏侯」等的算法。算學本科修習曆算、三式（六壬、盾甲、太乙）和天文書；本科外加習一小經（周易、公羊、穀梁）；若有願習大經的（禮記、左傳），悉聽其便（「宋史」選舉志）。至於科考、公試、私試的三舍法，與太學約略相似。考題範圍包括「九章」、「周髀」和算問（劉伯驥，民60）。而曆算科的派官公試只是偶而舉辦，每次名額又很少（「宋史」選舉志）。總之，在官方體系裡，算學並不熱門。

雖然算學在宋朝官學裡的處境已如上述，但是有宋一代仍是算學家輩出，數學創作鼎盛的時代。出名的數學家有楚衍、李治、賈憲、朱吉、劉義叟、趙彥若、劉益、秦九韶、楊輝、沈括等（劉伯驥，民60）。較重要的創作有賈憲的「黃帝九章細草」、秦九韶的「數書九章」、李治的「測圓海鏡」、「益古演段」、楊輝的「詳解九章算法」、「詳解算法」、「日用算法」、「乘除通變本末」、劉益的「議古根源」等等（趙良五，民80）。

宋初倡行科舉，它有許多缺失，諸如重才不重德、習非所用、禁錮思想、敗壞士風等等。施行日久，這些缺失逐漸顯現。官方有人為此憂心，而以范仲淹、王安石為代表。他們亟力興學，冀求學校能發揮教養的功能，而不是科學的附庸。民間則有書院興起，倡講義利之辯。朱熹一再以勿事科舉勸勉學生；陸象山也以“習聖賢”告勉弟子（陳東原，民69）。所以有不少的人才，是在科學體系之外；算學人才就是其中之一。從歷史的角度看，算學未能納入科學的科目，未嘗不是一件好事。有宋一代的算學經營，開拓了許多新的領域，如：解

高次方程式 (劉益)、排列組合與二項式乘方的展開 (沈括、賈憲)、同餘理論 (秦九韶)、幻方 (楊輝)、級數 (沈括) 等。設若算學列屬科考, 必然會吸納許多人, 窮究算經各書的辭章之義與句逗之美, 恐怕沒有時間和精神做開創性的研究。

「宋史」藝文志所錄的算學書籍, 有一類新的成員: 歌謠和口訣。例如: 「法算機要賦」、「法算口訣」、「解法求一化零歌」、「三元化零歌」。這些歌訣, 應是廣泛流傳的讀物。在紙筆都不便宜的年代, 用歌訣的方式傳授算法, 是經濟方便又有效率的辦法。古代中國, 一直把算當做“術”; 沈括的「夢溪筆談」, 把討論隙積術和會圓術的內容, 擺在技藝名下, 而不是曆算一章。所以算學教育的內容, 著重於方法的傳授, 而不是推理認識。歌訣雖不若印成文字或符號的公式, 具體可靠和便於查對, 但饒富文字趣味和韻, 便於記憶是它獨有的特色, 最適於用來教小孩。

元朝年代較短, 統治中國僅八十九年。不論興學或科舉, 規模都遠不如宋朝; 而且還帶有種族隔離的措施, 所以沒有特別值得述道的事蹟。在官學體系裡, 算學是附屬在陰陽學之下。如「元史」選舉志所說: 世祖至元二十八年夏六月始置諸路陰陽學... 每路設教授以訓誨之其有術數精通者每歲錄呈省府赴都試驗果有異能則於司天台內... 至元十八年詔求前代聖賢之後儒醫卜筮通曉天文曆數并山林隱逸之士...。金朝進士、出名的數學家李治也被網羅為翰林學士。蒙古人以游牧民族, 入主中國, 建立一個跨越歐亞的大帝國。治下民族融合文化交流, 是自然會發生的

事。元滅宋是在征歐之後, 因而也帶來一些西域的人物和文化到中國。例如至元四年, 西域札馬魯丁撰進萬年曆; 元世祖頒行到平宋以後, 才詔郭守敬改治新曆 (授時曆) (「元史」曆志)。清兪正燮謂授時曆乃以回回曆為藍本製成者 (李人言, 民 72)。

回回就是阿拉伯; 他們與古西希臘文明早有接觸。許多重要的希臘著作, 早就有阿拉伯文譯本; 如歐几里得的「幾何原本」、托勒密的「全集」、還有亞里斯多德、阿基米德、阿波羅尼、希羅、戴奧弗多斯以及印度的著作。他們自己也發展了一些代數幾何和三角 (M. Kline, 1972)。這些豐富的成果, 雖然不見得會全部傳到中土, 但是文化的交流, 多少會帶來文化再生的契機。金元兩代的數學經營, 開發了許多新的領域。例如李治的「測圓海鏡」是第一本提到天元術的算學著作; 同時也在圓和勾股形下了許多功夫。他提出許多邊長為整數的直角三角形。朱世傑的「算學啓蒙」改進以前的計算方式和口訣, 也探討面積、體積、垛積、方程式等 (趙良五, 民 80)。他的「四元玉鑑」則把天元術一般化為四元術, 能處理含四個未知數的高次聯立方程式; 也研究面積, 垛積 (級數) 以及招差術等。這些算學書籍, 專業傾向頗高, 與日常生活不是很切近; 而且有分化的傾向, 也就是一本書只就少數主題做較深入的探討。

七、明清時期

明朝開基初始, 是用心辦好教化。在明太祖未登基, 還頂著吳王的封號打天下時 (元

至正二十四年)，就詔設文武二科取士。其應文學者察之言行以觀其德考之經術以觀其業試之書算以觀其能策之經史時務以觀其政事（「明史」選舉志）。太祖登基以後，不僅在京師設國子學，還詔令全國廣設學校。「明史」選舉志說：… 治國以教化爲先教化以學校爲本京師雖有太學而天下學校未興宜令郡縣皆立學校… 生員專治一經以禮樂射御書數設科分教…。可見明初，不論是學校的課程或科考的科目，都包含算學。算學課程是：… 凡生員每日務要習學算法必由乘因加歸除減精通九章之數昔之善教者經義治事貴在兼通曾謂律令數學切於日用可忽而不之學乎（「皇明太學志」卷七）。可見當時的課程是從加減乘除到精通九章，由淺入深；而教學的精神，則貴在兼通。這是一種超越前人的思想。數學在中國，一向被當做“術”來傳授和學習。我們所見到的算學書，都是問題集。不同的問題，有不同的術來解決。至於這些術之間的關聯脈絡，則未見深究。一般的學生，只能靠口訣或歌謠，記誦這些術；所能依恃的，只有熟能生巧；學理方面的認識研究，是專門學者的事。我們不知道「太學志」所說的，只是冠冕的堂皇之辭或真正的普遍在課堂上做到兼通。至於算學的科考，主要在測試是否通九法（趙良五，民80）。這裡所說的九法是指什麼，我們不得而知；可能是「九章算術」的九章。

洪武十七年禮部頒行的科考定式，增加文辭試題的份量，而廢去實事的部份。這樣的科試所錄取到的人才，必然缺乏治事的能力。宣德四年，國子監助教王先奏請恢復儒生兼習書算。他說：近年生員止記誦文字以備科

貢其於字學算法略不曉習改入國監歷事諸司字畫羸拙算數不通何以居官。他的奏請獲得同意（「日知錄集釋」卷十六經義論策）。等到八股文興起，與科考合流，形成一個巨大的漩渦；吸盡了絕大多數讀書人的專注和思想。他們都不讀正書，只讀房稿闡墨（陳東原，民69）。在這股歪風攏罩下，遭殃的是所有的道德學術，不僅僅是算學。雖然有少數人，如王陽明、顧炎武、黃宗羲等人力抗；但是在有明一代專制高壓下，書院屢起屢墮，沒能像以前一樣，與官學分庭抗禮（陳東原，民69；伍振鷺，民74）。總之，明朝是中國數學發展的低潮。有紀錄的算書雖然有一些，可能因爲沒有創新的理論或方法，很快就被淘汰；留傳到現在的很少（趙良五，民80），其中最重要的應是程大位的「算法統宗」。

雖然官學的場景是如前所說的暗淡，明朝的數學還有兩件值得注意的發展：算盤的普及和西方曆算的輸入。「明史」藝文志天文類錄有：利瑪竇「幾何原本」六卷、「勾股義」一卷、「表度說」一卷、「圓容較義」一卷；艾儒略「幾何要法」四卷。曆數類有羅雅谷的「籌算」一卷；徐光啓的「崇禎曆書」一百二十六卷（這是徐光啓、李之藻、王應遴與、羅雅谷合著，其中有「割圓八線表」六卷、「測圓八線立成長表」四卷）。還有一些「明史」藝文志所漏列的，如利瑪竇的「同文算指」、湯若望的「籌算指」、羅雅谷的「比例規解」等等。明季西學輸入，都賴傳教士引進。教會人士引進西方學識科技，主要的目的在取信於中國人，尤其是統治階層和士紳階層，以取得傳教許可和帶動信教風氣。對於民風保守心常懷古

的中國社會，新知識甚至常受守舊人士的攻擊，不能很快的被普遍接受。所以西方算學輸入初始，所影響的層面相當有限，還不能看出它對數學課程所發生的作用。

珠算起源於何時，不得而知。一般相信，它不是某人福至心靈發明創造出來的，而是經過長久演變而成(李培業,1991)。從名稱上查考，珠算應是從籌算演進而成。因為籌算是放在算盤上操作，而珠算的工具也稱為算盤。可能是以前的人覺得把算籌附在算盤上比較方便，算籌再演變為算珠。遠至東漢徐岳的「數術記遺」就提過：珠算控帶四時經緯三材(李約翰，民74)。其後這種計算工具一直沒沒無聞，無突出的記載；到明朝吳敬所著「九章算法比類大全」河圖書數有「不用算盤至無誤差」與「免用算盤並算子乘除加減不為難」的說法(趙良五，民80)。程大位的「算法統宗」是第一部用珠算為主要背景的算書；其附錄列有四種書籍：盤珠集、走盤集、通微集、通機集，看來好像與珠算有關(李約翰，民74)。珠算把算術口訣化，計算手續機械化。在「算法統宗」裡，加減乘除都有歌訣。只要口訣唸得順，操作夠快，運算可以極高的速度進行操作；幾乎可與現代的電腦一較高下(李約瑟，民74)。隨著珠算的普及，心算隨之興起。一般長於珠算的人，都能以高速進行心算。他們的心算，並不是直接操作數字的運算，而是想像在操撥算盤。這樣的發展使得算學更朝技藝走向；雖然有利於算術在生活中落實，但是不利於理論系統的成長。

清朝前期的的學校與科學制度，大致摹仿明代；正規學校的課程，都是為科學考試作

準備。算學在這個體系內的角色，一如往昔。在正規的中央學校與地方學校之外，清朝的官學，還有一系特殊學校；其中算學館設於康熙五十二年(「清朝掌故彙編內編」卷三十八)，隸屬國子監。康熙皇帝在處理欽天監與洋教士的爭論，自覺對西學所知不多，以致難以處斷；因而發奮學習西洋曆算，延請西洋教士講解，並令何國宗等編纂「數理精蘊」。雍正元年頒行「數理精蘊」；雍正十二年八旗官學增設算學教習十六人，每旗官學各選三十名學生學習算法(「清朝掌故彙編內編」卷三十八)。從這些背景推想，西洋曆算應該已進入算學館與旗學算學的課程。私學則有屬小學層次的教館、私塾與義塾，與屬大學層次的書院。小學層次的私學，主要還是以準備科舉考試為目的(陳東原，民69)；課程裡算學的分量，應是相當的少(司琦，民70；臺灣文獻(38))。

書院的學風較為自主；雖然無法完全擺脫科舉考試的影響，但與官學相較，是屬於學術色彩較濃的教學機關；較受士林和社會的敬重(陳東原，民69)。有幾所書院頗專注於算學電化等科目。例如光緒二十三年江蘇學政龍湛霖奏保書院肄業生員說：江陰舊有南菁書院……方今時事艱難算學尤為急務臣到任後於算學之中分別電化光重汽機等門飭在院諸生即向以經義詞章名家者亦必各兼一藝……(「清朝掌故彙編內編」卷四十一)。可見他是很重視算學；可惜的是他把這些都歸為「藝」。

我們所說的清朝後期，是指同治元年在京師設同文館，開始有新制的學校。同治六

年，總理大臣請於同文館內添設算學館。設館的緣由是：……蓋以西人製器之法無不由度數而生今中國議欲講求製造輪船機器諸法苟不藉西士為先導俾講明機巧之原製作之本竊恐私心自用徒費錢糧無裨於實際……（「清朝掌故彙編內編」卷三十九）。同治八年，設廣方言館於上海和廣東。這些學校，都有算學課程。同文館共習八年；第四年講述數理啓蒙和代數學；第五年學幾何原本、平面三角、球面三角；第六年授微積分（趙良五，民80）。廣方言館入學後即學算術；無論筆算珠算，從基本四則開始，再學算經十書及算學課藝；西方數學則含幾何和代數（「清朝掌故彙編內編」卷四十）。這是我們所知道，在新式學堂的課程中，最早提及珠算的。繼這些語言學校之後，各地紛紛設立許多軍事武備及實業技藝學堂。這些新制學堂，大都有數學課程。以天津水師學堂為例，就有幾何、代數、平弧三角、八線、級數、測量等（「清朝掌故彙編內編」卷四十）。清末算學教育，執行較久的，是奏定學堂章程所制訂的壬寅學制。壬寅學制的主要學階是：初等小學堂五年、高等小學堂四年、中學堂五年、高等學堂（大學預科）三年、大學堂（分科）三至四年、通儒院五年。初等小學堂的算學課程每週六小時，主要為算術，包括數字（整數與小數）的寫法、讀法、四則運算。四年級開始有珠算的加減，五年級有珠算加減乘除；高等小學堂算學每週三小時也是以算術為主，包括分數、小數、比例、各種單位的計算，還有日用簿記、面積體積、珠算加減乘除。中學堂算學課程每週四小時；第一年學算術、第二年學算術、代數、幾何、簿記；第三年

學代數和幾何；第四年學代數和幾何；第五年學幾何和三角。高等學堂屬文法預科者，第二年授代數與解析幾何，每週二小時；屬理工預科的，第一年授代數與解析幾何，每週五小時；第二年授三角與解析幾何，每週四小時；第三年授微積分，每週六小時。屬醫學預科者第一年授代數與解析幾何，每週四小時；第二年授解析幾何與微積分，每週二小時（趙良五，民80）。京師大學堂開辦章程所列學堂功課例分為兩類；一類稱為溥通學，類似現在的通識課程；計十學門：經、理、中外掌故、諸子、初級算學、初級格致、初級政治、初級地理、文學、體操等。學生必須修完溥通學各門後，並且在英、法、俄、德、日五種外國語文中，選讀一種，才可以在專門學中選一門或兩門，作為專攻學門。專門學也有十門：高等算學、高等格致、高等政治學、高等地理、農、礦、工程、商、兵、衛生等。孫家鼐籌辦時所持的宗旨是「中學為體西學為用」（「清朝掌故彙編內編」卷三十九）；算學保留在專門學，應屬用的部門。隨後頒布的直省大學堂章程，考慮到小學堂和中學堂並未普遍設置，恐無所取才；所以設有備齋（相當於小學堂）正齋（相當於中學堂）。真正屬高等教育的是專齋。備齋課程兩年，正齋四年；這兩齋都有算學課程。備齋第一年學算術；第二年學代數與形學（幾何）。正齋第一年教形學與圓錐曲線；第二年教八線（三角）與勾股（幾何）；第三年教代形合參（解析幾何）測量與微積學；第四年教代數根原。專齋二到四年，卻有測繪而無算學（「清朝掌故彙編內編」卷三十九）。可能直省大學堂把算學視為體，即基本素養，所以沒有安

排珠算，也不含在專齋的課程裡。光緒二十七年，安徽巡撫鄧華熙疏請廣設算學專門學堂；他在奏疏中說：「算學一門其用至大，東西各國無人不習……畢業以後，以之製器，則分寸無差；以之行軍，則槍砲有準。故各國之士之農之工之商之兵，無不知算以爲富強之基」(「清朝掌故彙編內編」卷四十)。可見鄧華熙認爲受過算學教育的人，凡事講求精準，從事各種行業，都能有成就。換句話說算學一方面授予求精準的能力；一方面培養講精準的態度。所以算學是融合體用的科目。光緒二十九年頒布的實業學堂章程，算術大多安排在豫科；除了特別的科目如航海簿記測量等，本科才設有算學(司琦，民74)。我們必須注意在本科和分科所設的數學課程，名稱上的差異。宣統二年改訂的小學堂課程，數學稱爲算術，且含珠算；宣統元年的中學課程分爲文實兩科；算學是實科的主修，文科的通習課程。學部奏籌辦分科大學，包括經、法、文、格致、農、工、商七科(伍振鷺，民74)，其中並沒有算學一科。幾千年來，數學一直被當做是「藝」的一門。在“小學習其事，大學習其理”的傳統觀念之下，數學通常只被畫歸卜卦制曆，很少有機會登上大學的殿堂。清朝末年，這種角色已逐漸改變。在基層學校，數學還是一種「藝」；在中學、職校以及大學預科，數學則是一門基礎學科。

八、結論

中國歷朝數學課程的演變，有以下三項特徵：(1) 課程內容改變緩慢。先秦時期，以

九數爲主要的數學課程內容。經過七百多年到魏晉南北朝，十部算經之中，除「緝古算經」，其餘九部，已都出場。再經過三十多年到隋唐之交，王孝通完成「緝古算經」；唐朝將十部算經列爲國子監算學的課程內容。但是從此以後，官設學校的數學課程內容，似乎少有更張，只是在算經十書之間取捨。一直到清末廣方言館，算經十書仍是課程內容的一部份。其間雖有從西方傳進來的數學，如隋朝的婆羅門數學，明朝及清朝前期西方傳教士引進的數學；或者民間研究發展出來的，如沈括的級數、楊輝的幻方、朱世傑的四元術等等，我們都沒有找到它們曾進入官學課程的記載。根據背景猜測，西方數學最早進入官學課程，可能是設於康熙五十二年的算學館，或設於雍正十二年的旗學。

這些內容，一直停留在實用的層面上，沒有進入理論的層次；形式上則是各別零散的“術”的壘積，沒有發展推理論證的架構。有些術，只是因爲數目上的巧合(林炎全，民84)才能使用，卻被當做一般的方法。沒有經過論證，就無法察覺這種偏差。甚至對於已知的錯誤，也只是在注釋裡說說，不肯(敢?)把本文修正。圓周率是一個典型的例子；儘管劉歆、劉徽、祖沖之等老早就已經算出更精密的圓周率，現在我們所看到的「九章算術」、「周髀算經」、「孫子算經」等等，還是以3爲圓周率。

(2) 算學的階位低。如「禮記」內則所載，古代官家小孩，十歲入小學，二十歲入大學。「小學習其事，大學習其理」，數學只包含於小學課程，大學就不再學算學。可見數學是

被當做處理事情的術或藝，與修身進德無涉。古代設學校，以培養順民為主要目的，德行涵育是主要的教育內容。算學被當做一種技術，勉強敬陪六藝之末。從漢朝開始以策試取士，及至隋唐，科舉興起，官方設立的學校，課程漸以科舉考試為目標。歷朝科考，算學一科只是偶而舉辦，錄取的員額不多。即或中舉，派官的品級也不高（「唐書」百官志）。自然不會吸引很多人投入；官方甚至限制算學學生的身份。出身貴族或高品的官家子弟，是不可進入算學之門。「顏氏家訓」雜藝篇有這樣露骨的說法：筭（算）術亦是六藝要事。自古儒士論天道定律曆皆學通之。然可以兼明不可以專業……。這種說法，顯示一般人對數學的看法是：做事需要數學，但是不值得全心投入研究。至晚清洋務運動，有許多人開始重視數學。但是他們之所以重視數學，是因為數學在製器時精準有效。數學仍只是一種工具，不是一門學理；更無涉修身養性。

這與西方社會大異其趣。西方早期的文明，就已經賦與數字很重要的角色。畢達哥拉斯（Pythagoras，約585~500 BC）視數為實體的要素。柏拉圖在其聚會所的門口，寫有「不懂幾何者，不得入此門」的招牌。他認為實體世界生生滅滅，變動不居，是因為她不完美。完美（理想）的世界是永恆的，循數學原理設計運行的。這種思想，使數學成為自然科學的指引；並且在宗教的圍城裡，為自然科學找到出路。神依循數學原理創建宇宙，探索宇宙運行的數學定律，彰顯神工的偉大，是崇拜神的方式之一，與研讀聖經一樣重要。

(3) 數學活動的重心，主要在民間。在有科舉制度之前，官方學校主要的教育對象

是貴族和高官的子弟；教育的目的在應對能力的培養和德行節操的涵育；禮樂詩書是重點內容。有科舉制度之後，官方學校成為科舉考試的準備班。在官方的制度裡，算學常常是天文卜算轄下，未被重視的一個分支，興廢無常。在這樣的背景裡，官方所做的數學研究，自然是少之又少。相較之下，民間在數學的創研，就活絡得多。郭世榮曾列舉五十位迄十九世紀末，中國較具影響力的天算家；其中官學出身的，只有兩位：宋朝的賈憲和清朝的明安圖（郭世榮，1991）。算學教育，也是民間較官方更活絡。官方的算學教育，主要在培養曆算，以及卜算的人才，門路窄而守舊成風（郭世榮，1991）。

我們推測這三項特徵，是由於幾項因素使然。首先，中國歷朝在文化上，是很封閉的。由於周圍國家的文化水準不高，養成中國人自大的心態；以天朝自居，視四周接壤為蠻夷。所以對外來文化，持鄙視排斥的態度；歷朝統治者，為了能安穩統治，必須控制人民的思想；常採行鎖國政策，並鼓舞前述態度。封閉的後果就是窒息。數學的發展，最多只能隨社會變遷的脚步，緩步慢行。古代中國的數學，日常生活實用層面所需的算法發展完成之後，就停滯下來。西方的數學，發展過程有很大的不同。她曾經在不同的發展中心之間移殖、轉化；包括埃及、巴比倫、古典希臘、亞歷山卓、印度、阿拉伯、歐洲。在不同的發展中心，由於不同的民族性和社會需求，發展各種不同的領域支系。例如巴比倫長於代數，古典希臘則專於幾何，亞歷山卓發展出代數幾何和三角學等，印度、阿拉伯的記數法現在已是世界通用的記數法；傳到歐洲，又添加

了解析幾何微積分等。設若希臘的數學被關在西腊的領域（事實上只是在幾個發展中心）內，經過羅馬人長時間的忽視和摧殘（M. Kline, 1972），恐怕早被掃進歷史的棄物堆。

其次，東方務實的民族性，影響數學發展的方向。實務上需要的數學，多屬數量的，對於性質方面的探討做得很少；從未對數學命題做完全形式的證明，至多只是用結果實證（洪萬生，民71）。如句股定理的證明，用圖形拼合。缺乏性質方面的認識，使得中國古代的數學發展，往各別的『術』鑽研，而不能形成一般化的系統。「九章算術」裡的方錐、圓錐、陽馬、鱉臠都是錐體；圓亭、方亭、芻蕘、芻童、曲池、盤池都是錐臺。它們的體積計算，可以納在一個一般化的方法來處理。但是寫在書上的，卻是各有其術。用結果實證，使得數學抽象化成爲不可能；而且會受到數字巧合的誤導，以偏概全（林炎全，民84）。既然一般化和抽象化，都是那麼困難或不可能，數學已無自我發展的能力；最多只能依附於外在的社會需求，勉強維持於不墜；數學課程內容演變的步調自然緩慢。蕭文強指出中國古代的數學有兩個特色：1. 外塑（external stress）甚過內造（internal stress）；2. 歸納多過演繹（蕭文強，1994）。我們覺得，既使就歸納而言，都做得很少。中國古代的數學，大多保持初生的狀態。

西方世界，都是開放的小國，甚至只是小城邦，無法鎖國自存，必須面對競爭。以教育提升國民的素質，積貯國力，是必要的措施。普遍教育，在古希臘斯巴達城邦就曾實施。宗教革命時，新教主張人人可以研讀聖經。要

研讀聖經，自然得先受教育，使之識字。路德主張父母有送子女入學的義務。普遍教育、義務教育、強迫教育的實施，雖然有待經濟條件的配合，但是在西方社會，它是早就存在的思想。工業革命之後，許多國家爲了原料和市場的競爭，鼓勵航海和兵器研製。這些最後都要歸結到數理教育。一般教育的掌理，遂漸由教會轉到政府；加重自然科學的份量，並用國家的資源，鼓勵研究（林玉体，民77）。這些狀況，與中國的歷史場景完全不同。

我們並不認爲中國人缺乏抽象演繹的能力。春秋時代的「墨經」就有豐富的論理內容；韓愈的嘮騷之作獲麟解，亦有三段論式的雛形。這些苗芽未能繼續成長成爲一門學理，除了前面所說務實的民族性之外，我們認爲還有下述原因：(1) 科舉制度的影響。參加科舉考試，是古代作官主要的途徑。使得許多人寒窗苦讀，以參加科舉考試爲目的。曆算是科考的冷門，從事者既少；且爲考試而讀，自然談不上研究發展。(2) 儒家提倡忠君，受到歷代君王獨寵。儒家讚揚木訥，對於論辯說理的法則，自然棄之如弊履。不語怪力亂神，則怪力亂神難有理清的一天。許行倡君民並耕說，竟被罵爲南蠻馱舌。在儒家學說居主流的時候，新知識與新學說，是難登大雅之堂。(3) 統治者思想壓制。古代帝王常爲統治的威權，管制人民的思想。除了用科舉制度攏絡人才；倡真龍天子說以愚民智；並興文字獄以絕雜思異說。歷史上政治勢力衰退，思想鬆綁的時候，如春秋戰國和魏晉南北朝，學術活動最活絡，創建成果最豐碩。更不幸的是古代算學歸屬天文曆法。觀天象卜國運，是皇國大事，一般

庶民是不得與聞私學的。例如宋初考選天文術士，合格者錄用，不合格者黥配海島（「宋史」天文志）。

我們很慶幸能生在這個時代·歷史的那些陰霾，已經離開很遠，不再威脅我們。現在訊息交流便捷，幾乎沒有國界之分；思想多元開放，了無禁忌；國家獎勵研究，不遺餘力。而且教育已經成爲一門科學。數學課程的制訂，需要根據各種理論，動員各方專家。精心編寫，經年試用改進，最後才普遍實施。我們的學生應該都能適應裕如，享受快樂的學習；不是嗎？

參考資料

1. 王仲孚，中國上古史，正中，台北，民77。
2. 司琦，中國國民教育發展史，國立教育資料館，台北，民76。
3. 伍振鷺，中國大學教育發展史，國立教育資料館，台北，民74。
4. 任時先，中國教育思想史，商務，台北，民76。
5. 李人言，中國算學史，商務，台北，民72。
6. 李兆華，中國數學史，天津出版社，臺北，民83。
7. 李約瑟，中國之科學與文明第四冊，陳立夫主譯，商務，台北，民74。
8. 李培業，關於我國籌算轉變爲珠算的時代問題，數學史研究文集第二集，74-79，內蒙大學出版社（九章出版社，台北），1991。
9. 李繼閔，「九章算術」及其劉徽注研究，九章出版社，台北，1990。
10. 沈雲龍主編，清朝掌故彙編內編，近代中國史料叢刊三編第十三輯。
11. 林玉体，西洋教育史，文景出版社，台北，民77。
12. 林炎全，白話「九章算術」及其在當前數學教育之價值，臺灣省中等學校教師研習會，台中，民84。
13. 洪萬生，重視證明的時代，中國文化新論，科技篇，格物與成器，聯經，台北，民71。
14. 陳東原，中國教育史，商務，台北，民69。
15. 郭世榮，論中國古代的國家天算教育，數學史研究文集第二集，27-30，內蒙大學出版社（九章出版社，台北），1991。
16. 趙良五，中西數學史的比較，商務，台北，民80。
17. 臺灣省文獻委員會，臺灣省通誌卷五，教育志，衆文圖書公司，台北，民59。
18. 劉伯驥，宋代政教史，中華書局，台北，民60。
19. 錢寶琮，算經十書，錢寶琮校點，中華書局，北京，1963。
20. 蕭文強 (Man-Keung Sui), Mathematics Education in Ancient China: What Lesson Do We Learn from It?, 發表於數學史與數學教學之關聯研討會，1994。
21. Morris Kline, Mathematics in Western Culture, 張祖貴譯 (西方文化中的數學), 九章出版社，台北，1953。
22. Morris Kline, Mathematics Through from Ancient to the Modern Times (數學史, 林炎全, 洪萬生, 楊康景松譯, 九章出版社, 台北), 1972。

—本文作者任職於台灣省中等學校教師研習會—