從一道組合計數題談起

宋秉信

徐利治教授在「計算組合數學」一書中有這樣一道題: 假設有 m 種事物, 每種事物各有 s 個, 問任取 r 個的組合方法數有少個?

我們不妨把這種方法數記爲 $C(s^m,r)$,那麼,

$$C(s^m,r)=\sum_{k=0}^{[\frac{r}{s+1}]}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{m-1+r-k(s+1)}{r-k(s+1)}。$$

其中$r\geq k(s+1),\quad 0\leq k\leq[\frac{r}{s+1}]$, 符號$[x]$表示取不大於$x$ 的最大整數。

對於這道題, 我們關心的不只是如何解, 更重要的是$C(s^m,r)$具有哪些性質?

我們的思路是這樣的: 題目中問“任取 r 個”的組合方法數有多少? 何謂任取r個, 無外乎是對每種事物可以重複選取, 也可以一個不取, 若用枚舉發生函數來表示, 即爲

$$(1+t+t^2+\cdots+t^s)^m.$$

這樣一來, 問題便轉變爲怎樣找出所述發生函數展開式中t^r 的係數, 由於

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=1}^{s}t^k\Big)^m&=(1-t^{s+1})^m\cdot(1-t)^{-m}\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\cdot\binom{m}{k}\cdot t^{k(s+1)}\cdot\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m-1+j}{m-1}\cdot t^j\Big)\end{aligned}$$

如果考慮 $t^{k(s+1)}=t^r$, 可由 $j=r-k(s+1)\geq 0$ 推出 $0\leq k\leq[\frac{r}{s+1}]$。即有

$$\Big(\sum_{k=0}^{s}t^k\Big)^m=\sum_{k=0}^{sm}t^r\Big(\sum_{k=0}^{[\frac{r}{s+1}]}(-1)^k\cdot\binom{m}{k}\cdot\binom{m-1+r-k(s+1)}{r-k(s+1)}\Big)$$

這就說明任取 r 個的組合方法數是

$$C(s^m,r)=\sum_{k=0}^{[\frac{r}{s+1}]}(-1)^k\cdot\binom{m}{k}\cdot\binom{m-1+r-k(s+1)}{r-k(s+1)}。$$

那麼 $C(s^m,r)$ 有哪些性質呢?

總的來說, $C(s^m,r)$ 具有類似二項式係數 $\binom{m}{k}$ 所具備的性質。具體有:

性質1: 類似二項式係數 $\binom{m-1}{r-1}+\binom{m-1}{r}=\binom{m}{r}$ 有恆等式:
$C(s^{m-1},i)+C(s^{m-1},i+1)+\cdots+C(s^{m-1},i+s)=C(s^m,i+s)$。
即 $\sum_{j=0}^{s}C(s^{m-1},i+j)=C(s^m,i+s)$。

證明: 由於 $\left(\sum_{k=0}^{s}t^k\right)^m=\sum_{r=0}^{sm}C(s^m,r)\cdot t^r$
所以

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{k=0}^{s}t^k\Big)^m=\Big(\sum_{k=0}^{s}t^k\Big)^{m-1}\cdot(1+t+t^2+\cdots+t^s)\\ &=C(s^{m-1},0)+[C(s^{m-1},0)]+C(s^{m-1},1)]t+[C(s^{m-1},0)\\ &+C(s^{m-1},1)+C(s^{m-1},2)]t^2+\cdots+\Big[\sum_{j=0}^{s}C(s^{m-1},j)\Big]\cdot t^s+\Big[\sum_{j=1}^{s+1}C(s^{m-1},j)]\cdot t^{s+1}+\cdots\end{aligned}$$

由此, 得 $C(s^m,i+s)=\sum_{r=0}^{s}C(s^{m-1},i+j)$。

性質2: 是楊輝三角形的推廣。

我們知道, 牛頓二項式定理是:

$$(1+t)^m=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\cdot t^r=\sum_{r=0}^{m}C(1^m,r)\cdot t^r。$$

其係數 $\binom{m}{0}=1,\binom{m}{1},\binom{m}{2},\cdots,\binom{m}{r},\cdots,\binom{m}{m}=1$, 它就是楊輝三角形中第 $m+1$ 行的全體數字。

逆推法別: 根據楊輝等式 $\binom{m-1}{r-1}+\binom{m-1}{r}=\binom{m}{r}$ 知, 楊輝三角形中的每一數都等於其頭頂上兩數之和, 邊界不足可加零補充。

邊界是每一行以1開始, 又以1結束。

如三項三角形:

$$\sum_{k=0}^{2}(t^k)^m=\sum_{r=0}^{2m}C(2^m\cdot r)\cdot t^r=\sum_{r=0}^{2m}\Big\{\sum_{k=0}^{[\frac{r}{3}]}(-1)^k\cdot\binom{m}{k}\begin{bmatrix}m-1+r-3k\\ r-3k\end{bmatrix}t^r$$

其中 $C(2^m,0)$, $C(2^m,1)$, $\cdots C(2^m,r),\cdots,C(2^m,2m-1)$, $C(2^m,2m)$ 是三項三角形的第 $m+1$ 行的全體數字, 當 $m=0,1,2,\cdots,r-1,r,\cdots$ 構成三項三角形。

三項恆等式為:
$C(2^{m-1},r-2)+C(2^{m-1},r-1)+C(2^{m-1},r)=C(2^m,r)$。如圖一所示。

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 & & & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & & 1 & \cdot & \multicolumn{5}{c}{C(2^{m-1},r-2)C(2^{m-1},r-1)C(2^{m-1},r)\cdot} & & & & 1 & & \\
 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \multicolumn{2}{c}{C(2^m,r)\cdot} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

圖一

同理, 我們可得到 $s+1$ 項三角形:

$$\Big(\sum_{k=0}^{s} t^k\Big)^m=\sum_{r=0}^{sm} C(s^m,r)\cdot t^r=\sum_{r=0}^{sm}\Big\{\sum_{k=0}^{[\frac{r}{s+1}]}(-1)^k\cdot\binom{m}{k}\cdot\binom{m-1+r-k(s+1)}{r-k(s+1)}\cdot t^r$$

其中 $1, m, \cdots, C(s^m, r), \cdots, m, 1$ 是 $s+1$ 項三角形的第 $m+1$ 行的全體數字。當 $m=0,1,2,\cdots,r-1,r,\cdots$, 按序排列起來便構成 $s+1$ 項三角形。

性質3:

$$\sum_{r=0}^{sm} C(s^m,r)=(s+1)^m,$$
$$\sum_{r=0}^{sm}(-1)^r C(s^m,r)=\begin{cases}0 & \text{當s爲奇數時,}\\ 1 & \text{當s爲偶數時。}\end{cases}$$

事實上, 我們令 $t=1$ 時 (或 $t=-1$ 時) 代入 $s+1$ 項三角形公式中, 即可得性質3之結論。

性質4: 類似二項式係數有 $\sum_{r=1}^{m}\binom{m}{r}^2=\binom{2m}{m}$, 數 $C(s^m,r)$ 也有 $\sum_{r=0}^{sm}C^2(s^m,r)=C(s^{2m},sm)$。

對於數 $C(s^m,r)$, 我們可分如下幾種情況進行討論。

(1) 當 s 爲奇數時,

$$\sum_{k=0}^{[\frac{sm-i}{2r}]} C(s^m,2rk+i)=\Big\{\frac{1}{2r}\Big\{(s+1)^m+2\Big(\sum_{k=1}^{r-1}\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k}{2r}\pi}\Big]^m\cdot\cos k\frac{sm-2i}{2r}\pi\Big)\Big\}$$
$$i=0,1,2,\cdots,2r-1。$$

這就是二項式係數每次缺 $2r$ 等分和的公式。

(2) 當 s 爲偶數時,

$$\sum_{k=0}^{[\frac{sm-i}{2r}]} C(s^m, 2rk+i)$$
$$=\frac{1}{2r}\Big\{(s+1)^m+(-1)^i+2\Big(\sum_{k=1}^{r-1}\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot\cos k\frac{sm-2i}{2r}\pi\Big)\Big\}$$
$$i=0,1,2,\cdots,2r-1。$$

這實際上是二項式係數每次缺 $2r+1$ 等分和的公式。

(3) 當 s 爲自然數時,

$$\sum_{k=0}^{[\frac{sm-i}{2r+1}]} C(s^m, (2r+1)k+i)$$
$$=\frac{1}{2r+1}\Big\{(s+1)^m+2\Big(\sum_{k=1}^{r}\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r+1}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r+1}}\Big]^m\cdot\cos k\frac{sm-2i}{2r+1}\pi\Big)\Big\}$$
$$i=0,1,2,\cdots,2r-1,2r。$$

對於性質4, 事實上, 只要考慮

$$\Big(\sum_{k=0}^{s}t^k\Big)^m\cdot\Big(\sum_{k=s}^{0}t^k\Big)^m=\Big(\sum_{j=0}^{s}t^j\Big)^{2m},$$

將上式兩端分別展開, 只比較其 t^{sm} 的係數即可得之。比方說, $s=2$,$m=3$ 時, 有

$$\Big(\sum_{k=0}^{2}t^k\Big)^3\cdot\Big(\sum_{k=2}^{0}t^k\Big)^3=\Big(\sum_{k=0}^{2}t^k\Big)^6,$$

在兩端比較 $t^{sm}=t^6$ 的係數, 有

$$C^2(2^3,0)+C^2(2^3,1)+C^2(2^3,2)+C^2(2^3,3)+C^2(2^3,4)+C^2(2^3,5)+C^2(2^3,6)=C(2^6,6)$$

即 $1^2+3^2+6^2+7^2+6^2+3^2+1^2=141$。

我們現在來證明數 $C(s^m,r)$ 在不同情況下求和公式。

首先, 讓我們來建立下列預備知識:

1. 設 $\theta_0(=1)$,$\theta_1(=e^{i\frac{2\pi}{2r}})$,$\theta_2$, $\cdots\theta_{2r-1}$ 爲1的一切 $2r$ 次冪根, 即 $x^{2r}=1$ 的全部根, θ_1 與 $\overline{\theta_1}$ $(=e^{-i\frac{2\pi}{2r}})$ 互爲共軛複數, 則有

$$\overline{\theta}_1^{jk}\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{kt}\Big)^m+\overline{\theta}_1^{j(2r-k)}\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{(2r-k)t}\Big)^m=\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)\pi}{2r}}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot\cos k\frac{sm-2j}{2r}\pi。\quad(1)$$

$$\sum_{k=1}^{2r}\Big[\theta_1^{-jk}\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{kt}\Big)^m\Big]$$
$$=\begin{cases}\Big\{(s+1)^m+(-1)^j+2\Big[\sum_{k=1}^{r-1}\Big(\frac{\sin\frac{k(s+1)\pi}{2r}}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big)^m\cdot\cos k\frac{sm-2j}{2r}\pi\Big]\Big\}\\ \quad(\text{當 } s \text{ 爲偶數時})\\ \Big\{(s+1)^m+2\Big[\sum_{k=1}^{r-1}\Big(\frac{\sin\frac{k(s+1)\pi}{2r}}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big)^m\cdot\cos\frac{sm-2j}{2r}\pi\Big]\Big\}。\\ \quad(\text{當 } s \text{ 爲奇數時})\end{cases}\qquad(2)$$

其中 $j=0,1,2,\cdots 2r-1$。

證明:

$$\because \theta_1=e^{i\frac{2\pi}{2r}}=\cos\frac{2\pi}{2r}+i\sin\frac{2\pi}{2r},$$
$$\therefore \theta_1+\overline{\theta}_1=2\cos\frac{2\pi}{2r},$$
$$\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{kt}\Big)^m=\big(1-\theta_1^{k(s+1)}\big)^m\cdot(1-\theta_1^k)^m$$
$$=\frac{\Big[1-(\cos\frac{k(s+1)}{r}\pi+i\sin\frac{k(s+1)}{r}\pi)\Big]^m}{\Big[1-(\cos\frac{k\pi}{r}+i\sin\frac{k\pi}{r})\Big]^m}$$
$$=\Big\{\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi-i\cos\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}-i\cos\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\Big\}$$
$$=\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot\Big\{\Big[\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi\cdot\sin\frac{k\pi}{2r}+\cos\frac{k(s+1)}{2r}\pi\cdot\cos\frac{k\pi}{2r}\Big]$$
$$+i\Big[\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi\cdot\cos\frac{k\pi}{2r}-\cos\frac{k(s+1)}{2r}\pi\cdot\sin\frac{k\pi}{2r}\Big]\Big\}^m$$
$$=\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot\Big\{\cos(\frac{k(s+1)}{2r}\pi-\frac{k\pi}{2r})+i\sin(\frac{k(s+1)}{2r}\pi-\frac{k\pi}{2r})\Big\}^m$$
$$=\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot e^{im\frac{ks}{2r}\pi}$$

$\because$ θ_1 與 $\overline{\theta}_1$;θ_1^{kt} 與 $\overline{\theta}_1^{kt}$; $\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{kt}\Big)^m$ 與 $\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{(2r-k)t}\Big)^m$ 以及 $\overline{\theta}_1^{kt}\cdot\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{kt}\Big)^m$ 與 $\overline{\theta}_1^{(2r-k)j}\cdot\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{(2r-k)t}\Big)^m$ 互爲共軛複數, 其中 s 爲偶數時。故有

$$\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{kt}\Big)^m+\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{(2r-k)t}\Big)^m=\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot 2\cos k\frac{sm}{2r}\pi$$

$$\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{kt}\Big)^m\cdot\overline{\theta}_1^{kj}+\Big(\sum_{k=0}^{s}\theta_1^{(2r-k)t}\Big)^m\cdot\overline{\theta}_1^{j(2r-k)}=\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot 2\cos k\frac{sm-2j}{2r}\pi$$

其中 $j=0,1,2,\cdots,2r-1$。

那麼有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{2r}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{kt}\Big)^m\cdot\overline{\theta}_1^{kj}\Big]\\
=&\sum_{k=1}^{r-1}\Big\{\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{kt}\Big)^m\cdot\overline{\theta}_1^{jk}+\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{(2r-k)t}\Big)^m\cdot\overline{\theta}_1^{j(2r-k)}\Big\}+(s+1)^m+(-1)^i\Big(\sum_{t=0}^{s}(-1)^t\Big)^m\\
=&\left[\begin{array}{l}\Big\{(s+1)^m+2\Big(\sum_{k=1}^{r-1}\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot\cos k\frac{sm-2j}{2r}\pi\Big)\Big\}(\text{當 } s \text{ 爲奇數時})\\
\Big\{(s+1)^m+(-1)^j+2\Big(\sum_{k=1}^{r-1}\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)t}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot\cos k\frac{sm-2j}{2r}\pi\Big)\Big\}(\text{當 } s \text{ 爲偶數時})\end{array}\right.\end{aligned}$$

其中 $j=0,1,2,\cdots,2r-1$。

2. 設 $\theta_0(=1)$, $\theta_1(=e^{i\frac{2\pi}{2r+1}}),\theta_2,\cdots,\theta_{2r}$ 爲1的一切 $2r+1$ 次冪根, 即 $x^{2r+1}=1$ 的全部根, 則有

$$\sum_{k=1}^{2r+1}\Big[\overline{\theta}_1^{jk}\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{kt}\Big)^m\Big]=(s+1)^m+2\Big(\sum_{k=1}^{r}\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r+1}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r+1}}\Big]^m\cdot\cos k\frac{sm-2j}{2r+1}\pi\Big)$$

其中 $j=0,1,2,\cdots,2r$。

證明方法跟前面相同, 我們略去。

現在再來證明當 s 爲奇數時, 公式

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{[\frac{sm-i}{2r}]}C(s^m,2rk+i)\\
=&\frac{1}{2r}\Big\{(s+1)^m+2\Big(\sum_{k=1}^{r-1}\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot\cos k\frac{sm-2i}{2r}\pi\Big)\Big\}\end{aligned}$$

$i=0,1,2,\cdots,2r-1$。

證明: 由於

$$\Big(\sum_{k=0}^{s}t^k\Big)^m=\sum_{r=0}^{sm}C(s^m,r)\cdot t^r, \tag{A}$$

設

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_0=C(s^m,0)+C(s^m,2r)+C(s^m,4r)+\cdots\\
\lambda_1=C(s^m,1)+C(s^m,2r+1)+C(s^m,4r+1)+\cdots\\
\cdots\\
\lambda_{2r-1}=C(s^m,2r-1)+C(s^m,4r-1)+C(s^m,6r-1)+\cdots\end{array}\right.$$

由預備知識知, 令θ_0,θ_1,θ_2,$\cdots\theta_{2r-1}$ 爲 $x^{2r}=1$ 的全部根, 將 $t=\theta_k$ 代入 (A) 中, 利用 $\theta_k=\theta_1^k$, $\theta_k^2r=1$ 便得:

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{2r-1}=(s+1)^m\\ \lambda_0+\theta_1\lambda_1+\theta_1^2\lambda_2+\cdots+\theta_1^{2r-1}\lambda_{2r-1}=\left(\sum_{t=0}^s\theta_1^t\right)^m\\ \lambda_0+\theta_2\lambda_1+\theta_2^2\lambda_2+\cdots+\theta_2^{2r-1}\lambda_{2r-1}=\left(\sum_{t=0}^s\theta_1^{2t}\right)^m\\ \cdots\\ \lambda_0+\theta_{2r-1}\lambda_1+\theta_{2r-1}^2\lambda_2+\cdots+\theta_{2r-1}^{2r-1}\lambda_{2r-1}=\left(\sum_{t=0}^s\theta_1^{(2r-1)t}\right)^m\end{array}\right. \tag{B}$$

從上我們可將 (B) 看做 $2r$ 個未知量 λ_0,λ_1,λ_2 $\cdots$, λ_{2r-1} 的線性方程而其係數行列式爲 $2r$ 階凡得蒙行列式。

$$\Delta_{2r}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&\theta_1&\theta_1^2&\cdots&\theta_1^{2r-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&\theta_{2r-1}&\theta_{2r-1}^2&\cdots&\theta_{2r-1}^{2r-1}\end{vmatrix}_{2r+2r}$$

(註: 第一列加上其餘各列, 再利用 $\sum_{k=0}^{2r}\theta_i^k=0$ 其中 $i=1,2,\cdots,2r-1$。)

$$=\begin{vmatrix}2r&1&1&\cdots&1\\0&\theta_1&\theta_1^2&\cdots&\theta_1^{2r-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\theta_{2r-1}&\theta_{2r-1}^2&\cdots&\theta_{2r-1}^{2r-1}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\theta_1&\theta_1^2&\theta_1^3&\cdots&\theta_1^{2r-1}\\\theta_2&\theta_2^2&\theta_2^3&\cdots&\theta_2^{2r-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\theta_{2r-1}&\theta_{2r-1}^2&\theta_{2r-1}^3&\cdots&\theta_{2r-1}^{2r-1}\end{vmatrix}_{(2r-1)\times(2r-1)}$$

$$=2r(\theta_1\theta_2\cdots\theta_{2r-1})\cdot\begin{vmatrix}1&\theta_1&\theta_1^2&\cdots&\theta_1^{2r-1}\\1&\theta_2&\theta_2^2&\cdots&\theta_2^{2r-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&\theta_{2r-1}&\theta_{2r-1}^2&\cdots&\theta_{2r-1}^{2r-1}\end{vmatrix}_{(2r-1)\times(2r-1)}$$

$$=2r(\theta_1\theta_2\cdots\theta_{2r-1})\cdot\nabla_{2r-1}$$

$$=2r(\theta_1\theta_1^2\cdots\theta_1^{2r-1})\cdot\nabla_{2r-1}$$

$$=2r\theta_1^{r(2r-1)}\cdot\nabla_{2r-1}$$

$$=2r(-1)^{2r-1}\cdot\nabla_{2r-1} \qquad 註(\theta_1^r=-1)$$

但 ∇_{2r-1} 是凡得蒙行列式 $\nabla_{2r-1}= 1 \le j < i \le 2r-1(\theta_i-\theta_t)\neq 0$, 又由於 $D=-2r\Delta_{2r-1}\neq 0$, 所以 (B) 根據克萊姆定理有唯一解: $\lambda i=\frac{1}{D}\cdot D_i$ $(i=0,1,2,\cdots,2r-1)$。

現在再來研究 D_i 的情況:

$$令\ (s+1)^m+\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^t\Big)^m+\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{2t}\Big)^m+\cdots+\Big(\sum_{t=0}^{s}\theta_1^{(2r-1t)}\Big)^m$$

$$=\begin{cases}(s+1)^m+2\Big(\sum_{k=1}^{r-1}\left[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\right]^m\cdot\cos k\frac{sm-2j}{2r}\pi\Big)(當\ s\ 爲奇數時)\\(s+1)^m+(-1)^j+2\Big(\sum_{k=1}^{r-1}\left[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\right]^m\cdot\cos k\frac{sm-2j}{2r}\pi\Big)(當\ s\ 爲偶數時)\end{cases}\qquad (C)$$

$$D_i=\begin{vmatrix}1&\cdots&1&(s+1)^m&1&\cdots&1\\\theta_1^0&\cdots&\theta_1^{i1}&\Big(\sum_{t=0}^s\theta_1^t\Big)^m&\theta_1^{i+1}&\cdots&\theta_1^{2r-1}\\\theta_2^0&\cdots&\theta_2^{i-1}&\Big(\sum_{t=0}^s\theta_1^{2t}\Big)^m&\theta_2^{i+1}&\cdots&\theta_2^{2r-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\theta_{2r-1}^0&\cdots&\theta_{2r-1}^{i-1}&\Big(\sum_{t=0}^s\theta_1^{(2r-1)t}\Big)^m&\theta_{2r}^{i+1}&\cdots&\theta_{2r-1}^{2r-1}\end{vmatrix}$$

對於 D_i 的各行都加到第一行並利用預備知識以及 $\sum_{j=0}^{2r-1}\theta_j=0$ 得

$$D_i=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&(C)&0&\cdots&0\\\theta_1^0&\cdots&\theta_1^{i-1}&\Big(\sum_{t=0}^s\theta_1^t\Big)^m&\theta_1^{i+1}&\cdots&\theta_1^{2r-1}\\\theta_2^0&\cdots&\theta_2^{i-1}&\Big(\sum_{t=0}^s\theta_1^{2t}\Big)^m&\theta_2^{i+1}&\cdots&\theta_2^{2r-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\theta_{2r-1}^0&\cdots&\theta_{2r-1}^{i-1}&\Big(\sum_{t=0}^s\theta_1^{(2r-1)t}\Big)^m&\theta_{2r-1}^{i+1}&\cdots&\theta_{2r-1}^{2r-1}\end{vmatrix}$$

(對 D_i 按第一行展開)

$$=(-1)^{i+1+1}\cdot(C)\cdot\begin{vmatrix}\theta_1^0&\cdots&\theta_1^{i-1}&\theta_1^{i+1}&\cdots&\theta_1^{2r-1}\\\theta_2^0&\cdots&\theta_2^{i-1}&\theta_2^{i+1}&\cdots&\theta_2^{2r-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\theta_{2r}^0&\cdots&\theta_{2r}^{i-1}&\theta_{2r}^{i+1}&\cdots&\theta_{2r}^{2r-1}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i}\cdot(C)\cdot\begin{vmatrix}-\theta_1^i&\theta_1&\cdots&\theta_1^{i-1}&\theta_1^{i+1}&\cdots&\theta_1^{2r-1}\\-\theta_2^i&\theta_2&\cdots&\theta_2^{i-1}&\theta_2^{i+1}&\cdots&\theta_2^{2r-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-\theta_{2r}^i&\theta_{2r}&\cdots&\theta_{2r}^{i-1}&\theta_{2r}^{i+1}&\cdots&\theta_{2r}^{2r-1}\end{vmatrix}_{(2r-1)\times(2r-1)}$$

各列都加到第一列, 並利用 $\sum_{k=0,k\neq i}^{2r-1}\theta_j^k=-\theta_j^i$。

把第 i 列的負號提出之後, 再把第1列與第2列互換, 換後的第2列又與第3列互換, $\cdots$, 換後 $i-2$ 列與第 $i-1$ 列互換, 總共互換 $i-1$ 次。

$$D_i=(-1)^{i+1+i-1}\cdot(\mathrm{C})\cdot\begin{vmatrix}\theta_1 & \cdots\theta_1^{i-1} & \theta_1^i & \theta_1^{i+1} & \cdots & \theta_1^{2r-1}\\ \theta_2 & \cdots\theta_2^{i-1} & \theta_2^i & \theta_2^{i+1} & \cdots & \theta_2^{2r-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \theta_{2r} & \theta_{2r}^{i-1} & \theta_{2r}^i & \theta_{2r}^{i+1} & \cdots & \theta_{2r}^{2r-1}\end{vmatrix}$$

$$=(\mathrm{C})\cdot(\theta_1\theta_2\theta_3\cdots\theta_{2r-1})\begin{vmatrix}1 & \cdots & \theta_1^i & \cdots & \theta_1^{2r-2}\\ 1 & \cdots & \theta_2^i & \cdots & \theta_2^{2r-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \cdots & \theta_{2r}^i & \cdots & \theta_{2r}^{2r-2}\end{vmatrix}_{(2r-1)\times(2r-1)}$$

(註 : $\theta_1\theta_2\cdots\theta_{2r-1}=-1$)

$\therefore D_i=-(\mathrm{C})\Delta_{2r-1}$故有

$$\lambda_i=\frac{D_i}{D}=\frac{(-1)\cdot(C)\cdot\Delta_{2r-1}}{(-1)\cdot\Delta_{2r-1}\cdot(2r)}=\frac{(\mathrm{C})}{2r}$$

將 (C) 代入, 可得

$$\lambda_i=\begin{cases}\frac{1}{2r}\Big\{(s+1)^m+2\Big(\sum_{k=1}^{r-1}\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot\cos k\frac{sm-2i}{2r}\pi\Big)\Big\}(\text{當 } s \text{ 爲奇數時})\\ \frac{1}{2r}\Big\{(s+1)^m+(-1)^i+2\Big(\sum_{k=1}^{r-1}\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r}\pi}{sin\frac{k\pi}{2r}}\Big]^m\cdot\cos k\frac{sm-2i}{2r}\pi\Big)\Big\}(\text{當 } s \text{ 爲偶數時})\end{cases}$$

其中 $i=0,1,2,\cdots,2r-1$。

同理可證當 s 爲自然數時, 公式

$$\sum_{k=0}^{[\frac{sm-i}{2r+1}]}C(s^m,(2r+1)k+i)$$

$$=\frac{1}{2r+1}\Big\{(s+1)^m+2\Big(\sum_{k=1}^{r}\Big[\frac{\sin\frac{k(s+1)}{2r+1}\pi}{\sin\frac{k\pi}{2r+1}}\Big]^m\cdot\cos k\frac{sm-2i}{2r+1}\pi\Big)\Big\}$$

成立。($i=0,1,2,\cdots,2r-1,2r$。)

參考資料

1. 徐利治, 蔣茂森, 朱自江,「計算組合數學」, 上海科技出版社。
2. 柯召, 魏萬迪,「組合論」, 科技出版社。

—本文作者任教於湖南省湘潭教育學院—