

和楊振寧教授漫談：數學和物理的關係

張奠宙

楊振寧是當代的大物理學家，又是現代數學發展的重要推動者，他的兩項巨大成就：楊-密爾斯規範場和楊-巴克斯特方程，成爲80年代以來一系列數學研究的出發點，其影響遍及微分幾何、偏微分方程、低維拓撲、辮結理論、量子群等重大數學學科。筆者曾在「楊振寧與當代數學」的訪談錄中有過較爲詳細的介紹（此文的中文版在臺灣「數學傳播」1992年4月發表，內容不全相同的英文版刊於「Mathematical Intelligencer」Vol.15,NO.4,1993。它的中譯文已被收入楊振寧的新著「讀書教學再十年」（臺灣時報出版公司,1995），這裡記錄的有關數學與物理學的關係，來自筆者在1995年末在紐約州立大學（石溪）訪問楊振寧先生時的一些談話材料，因爲不是系統的談話，故稱「漫談」。

一. 有關數學的兩則「笑話」

1980年代初，楊振寧曾在韓國漢城作物理學演講時說「有那麼兩種數學書：第一種你看了第一頁就不想看了，第二種是你看了第一句話就不想看了」。當時引得物理學家們轟堂大笑。此話事出有因。1969年，楊振寧察覺物理上的規範場理論和數學上的纖維叢

理論可能有關係，就把著名拓撲學家 Steenrod 著的「The Topology of Fibre Bundles（纖維叢的拓撲）」[1]一書拿來讀，結果是一無所獲。原因是該書從頭至尾都是定義、定理、推論式的純粹抽象演繹，生動活潑的實際背景淹沒在形式邏輯的海洋之中，使人摸不著頭腦。

上述漢城演講中那句話本來是即興所開的玩笑，不能當真的。豈料不久之後被「Mathematical Intelligencer」捅了出來，公之與衆。在數學界當然會有人表示反對，認爲數學書本來就應該是那樣的。不過，楊振寧先生說「我相信會有許多數學家支持我，因爲數學畢竟要讓更多的人來欣賞，才會產生更大的效果」。

我想，楊振寧是當代物理學家中特別偏愛數學，而且大量運用數學的少數物理學者之一。如果連他也對某些數學著作的表達方式噴有煩言，遑論其他的物理學家？更不要說生物學家、經濟學家、一般的社會科學家和讀者了。

另一則笑話，可在波蘭裔美國數學名家 S.M.Ulam 的自傳「一個數學家的遭遇 (Adventures of a mathematician)」[2]中讀到。該書294頁上寫道：

「楊振寧，諾貝爾物理學獎獲得者，講了一個有關現時數學家 and 物理家間不同思考方式的故事：

一天晚上，一幫人來到一個小鎮。他們有許多衣服要洗，於是滿街找洗衣房。突然他們見到一扇窗戶上有標記：『這裡是洗衣房』。一個人高聲問道：『我們可以把衣服留在這兒讓你洗嗎？』窗內的老板回答說：『不，我們不洗衣服。』來人又問道：『你們窗戶上不是寫著是洗衣房嗎』。老板又回答說：『我們是做洗衣房標記的，不洗衣服』。這很有點像數學家。數學家們只做普遍適合的標記，而物理學家卻創造了大量的數學。」

楊振寧教授的故事是一則深刻的寓言。數學圈外的人們對數學家們「只做標記，不洗衣服」的做法是不贊成的。數學家 Ulam 在引了楊振寧的「笑話」之後，問道，信息論是工程師 C. Shannon 創立的，而純粹數學家為什麼不早就建立起來？他感嘆地說：「現今的數學和19世紀的數學完全不同，甚至百分之九十九的數學家不懂物理。然而有許許多多的物理概念，要求數學的靈感，新的數學公式，新的數學觀念。」

二. 理論物理的「猜」和數學的「證」

1995年12月，楊振寧先生接到復旦大學校長楊福家的來信，請楊振寧在1996年5月到復旦為「楊武之講座」做首次演講。楊武之教授是楊振寧的父親，又是中國數學前輩，早年任清華大學數學系系主任多年，五十年代後則在復旦大學任教授，所以楊振寧很愉快地接受了邀請。但是他不能像楊福家校長

要求的那樣做20次演講，只準備講三次。順著這一話題，楊振寧先生又談了理論物理和數學的一些關係。

楊先生說：「理論物理的工作是『猜』，而數學講究的是『證』。理論物理的研究工作是提出『猜想』，設想物質世界是怎樣的結構，只要言之成理，不管是否符合現實，都可以發表。一旦『猜想』被實驗證實，這一猜想就變成真理。如果被實驗所否定，發表的論文便一文不值（當然失敗是成功之母，那是另一層意思了）。數學就不同，發表的數學論文只要沒有錯誤，總是有價值的。因為那不是猜出來的，而有邏輯的證明。邏輯證明了的結果，總有一定的客觀真理性。」

「正因為如此，數學的結果可以講很長的時間，它的結果以及得出這些結果的過程都是很重要的。高斯給出代數學基本定理的五種證明，每種證明都值得講。如果讓丘成桐從頭來講卡拉比 (Calabi) 猜想的證明，他一定會有20講。但是教我講『宇稱不守恆』是怎麼想出來的，我講不了多少話。因為當時我們的認識就是朝否定宇稱守恆的方向想，『猜測』不守恆是對的。根據有一些，但不能肯定。究竟對不對，要靠實驗。」

楊先生最後說：「理論物理的工作好多是做無用功，在一個不正確的假定下猜來猜去，文章一大堆，結果全是錯的。不像數學，除了個別錯的以外，大部分都是對的，可以成立的」。

楊先生的這番話，使我想起不久前 Quine 和 Jaffe 的一篇文章 [4]，發表於 Bulletin of AMS, 1993年8月號，曾引起相

當的轟動。該文的主題是問「猜測數學是否允許存在？」。其中提到，物理學已經有了分工，理論物理做「猜測」，實驗物理做「證明」。但是數學沒有這種分工。一個數學家，既要提出猜想，又要同時完成證明。除了希爾伯特那樣的大人物可以提出23個問題，其猜想可以成爲一篇大文章之外，一般數學家至多在文章末尾提點猜想以增加讀者的興趣，而以純粹的數學猜想爲主體的文章是無處發表的。因此，兩位作者建議允許「理論數學」，即「猜測數學」的存在。

這樣一來，現在有兩種相互對立的看法。一方面，物理學界中像楊振寧先生那樣，覺得理論物理的研究太自由，胡亂猜測皆成文章，認爲數學還比較好的。另一方面，數學界如 Quine 和 Jaffe 那樣，覺得目前數學研究要求每個結論都必需證明的要求，太束縛人的思想。應該允許人們大膽地猜測，允許有根據而未經完全確認的數學結論發表出來。二者孰是孰非，看來需要一個平衡。許多問題涉及哲學和社會學層面，就不是三言兩語可以解決的了。

三. 複數、四元數的物理意義

虛數 $i = \sqrt{-1}$ 的出現可溯源於15世紀時求解三次方程，但到18世紀的歐拉時代，仍稱之爲「想像的數」(imaginary)。數學界正式接受它要到19世紀，經 Cauchy, Gauss, Riemann, Weierstrass 的努力，以漂亮的複變數函數論贏得歷史地位。至於在物理學領域，一直認爲能夠測量的物理量只是實數，複數是沒有現實意義的。儘管在19世紀，電

工學中大量使用複數，有複數的動勢，複值的電流，但那只是爲了計算的方便。沒有複數，也能算出來，只不過麻煩一些而已。計算的最後結果也總是實數，並沒有承認在現實中有真有「複數」形態的電流。

鑒於此，楊振寧先生說，直到本世紀初，情況仍沒有多少改變。一個例證是創立量子電動力學的薛定諤 (Schrodinger)[4]。1926年初，據考證，他似乎已經得到現在我們熟悉的方程

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi(x, t) \quad (1)$$

其中含有虛數單位 i ， ψ 是複函數，但最後總是取實部。薛定諤因其中含虛數而對 (1) 不滿意，力圖找出不含複數的基本方程。於是他將上式兩面求導後化簡，得到了一個沒有虛數的複雜的高階微分方程：

$$-h^2 \ddot{\psi} = H\psi \quad (2)$$

1926年的6月6日，薛定諤在給洛倫茲的一封信中，認爲這一不含複數的方程 (2)「可能是一個普遍的波動方程。」這時，薛定諤正在爲消除複數而努力。但是，到了同年的6月23日，薛定諤領悟到這是不行的。在論文 [5]中，他第一次提出：「 ψ 是時空的複函數，並滿足複時變方程 (1)。」並把 (1) 稱謂真正的波動方程。其內在原因是，描寫量子行爲的波函數，不僅有振幅大小，還有相位，二者相互聯繫構成整體，所以量子力學方程非用複數不可。另一個例子是 H.Weyl 在1918年發展的規範理論，被愛因斯坦拒絕接受，也是因爲沒有考慮相因子，只在實數範圍內處理問題。後來由 Fock 和 London 用加入虛數 i 的量子力學加以修改，Weyl 的理論才又重新復活。

牛頓力學中的量全都是實數量，但到量子力學，就必須使用複數量。楊振寧和米爾斯在1954年提出非交換規範場論，正是注意到了這一點，才會把 Weyl 規範理論中的相因子推廣到李群中的元素，完成了一項歷史性的變革 [6]。

1959年，Aharonov 和 Bohm 設計一個實驗，表明向量勢和數量勢一樣，在量子力學中都是可以測量的，打破了「可測的物理量必須是實數」的框框 [7]。這一實驗相當困難，最後由日本的 Tanomura 及其同事於1982和1986先後完成 [8]。這樣，物理學中的可測量終於擴展到了複數。

令我驚異的是，楊振寧教授預言，下一個目標將是四元數進入物理學。自從1843年愛爾蘭物理學家和數學家 Hamilton 發現四元數之後，他本人曾花了後半輩子試圖把四元數系統，像複數系統那樣地廣泛運用於數學和物理學，開創四元數的世紀。但結果是令人失望的。人們曾評論這是「愛爾蘭的悲劇」[9]。時至今日，一個大學數學系的畢業生可能根本不知道有四元數這回事，最多也不過是非交換代數的一個例子而已。我還記起，1986年春，錢學森在致中國數學會理事長王元的一封信中，曾建議多學計算機知識，而把研究「四元數解析」(複變函數論的推廣)的工作貶為「像上一個世紀」東西。總之，我和許多數學工作者一樣，認為四元數發現，只不過是「抽象的數學產物」，不會有什麼大用處的。

楊振寧向我解釋了他的想法：物理學離不開對稱。除了幾何對稱之外，還有代數對

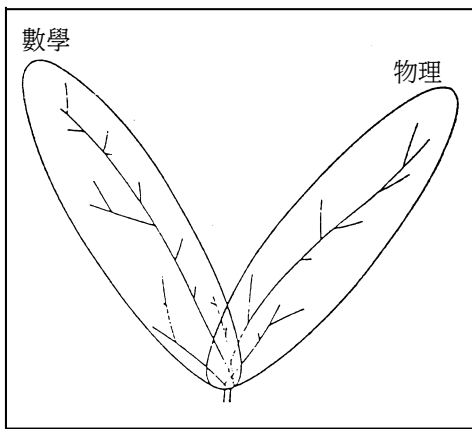
稱。試看四元數 $a+bi+cj+dk$ ，其基本單位滿足 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ，而 $ij = k, jk = i, ki = j; ij = -ji, jk = -kj, ki = -ik$ 。像這種對稱的性質在物理學中經常可以碰到。問題是這種四元數的對稱還沒有真正用於物理現象，而且物理現象中的一些對稱也還沒有找到基本的數學源由。最近，丘成桐等人的文章 [10]說：「我在1977年發表的一篇文章—Condition of Self-duality for SU(2) gauge fields on Euclidean four-dimensional space[11]，曾推動代數幾何中穩定叢的解析處理的理論。我還沒有問過數學家，不知道這是怎麼一回事。許多工作，包括運用四元數表示的物理理論，也許會在這種交流中逐步浮現的」。

楊振寧先生又說，至於將複變函數論形式地推廣到四元數解析理論，由於四元數乘積的非交換性，導數無法唯一確定，所以不會有什麼好結果出來。現在也有物理學家寫成著作，用四元數來描寫現有的物理定律，就沒有引起什麼注意。將來要用四元數表達的物理定律，一定會是一組非線性微分方程組，其解的對稱性必需用四元數來表示。所以，楊先生相信：「愛爾蘭的悲劇是會變成喜劇的」。

四. 「雙葉」比喻

數學和物理學的關係，應該是十分密切的。在數學系以外的課程中，物理系開設的數學課最多最深。「物理學公理化，數學化」，曾是一個時期許多大學問家追逐的目標。不過，擅長使用數學於物理的楊振寧教授卻認二者間的差別很大，他有一個生動的「雙葉」比喻，

來說明數學和物理學之間的關係，如下圖。他認為數學和物理學像一對「對生」的樹葉，他們只在基部有很小的公共部分，多數部分則是相互分離的。楊振寧先生解釋說：「它們有各自不同的目標和價值判斷準則，也有不同的傳統。在它們的基礎概念部分，令人吃驚地分享著若干共同的概念，即使如此，每個學科仍舊按著自身的脈絡在發展。」 [12]



參考資料

1. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press, 1951
2. S.M. Ulam, Adventures of a Mathematician, Charles Scribner's Sons, New York, 1976
3. Quine and Jaffe, Theoretical Mathematics: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics, Bulletin of Amer. Math. Soc., Vol. 29(1993),1-13.

4. 楊振寧： -1 的平方根，複相位與薛定諤—在英國帝國大學紀念薛定諤誕辰 100 周年大會上的演講，1987，收入「讀書教學又十年」，時報出版社，1995，pp.41-56
5. Schrodinger, E Ann. D. Phys. 81 (109)(received June 23).
6. C. N. Yang and R. L. Mills, Conversation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. Phys. REv. 96(1954), 191-195.
7. Y.Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. 115(1959),485.
8. A. Tonomura et al., Phys. Rev Lett. 48(1982),1443;56(1986),792.
9. E. T. Bell, Men of Mathematics, Dover Publications, New York, 1937.
10. J. A. Smoller, A. G. Wasserman, S. T. Yau: Einstein-Yang/Mills Black Hole Solutions. 「Chen Ning Yang—A Great Physicist of the Twentieth Century」. International Press, Hong Kong, 1995, pp. 209-221.
11. C. N. Yang, Condition of Self-duality for SU(2)gauge fields on Euclidian four-dimensional space, Phys. Rev. Lett. 38, 1977, pp. 1377-1379.
12. C. N. Yang, Selected Papers, 1945-1980, with Commentary. W. H. Freedman and Company, San Francisco, 1983.

—本文作者任教於中國上海華東師範大學—