

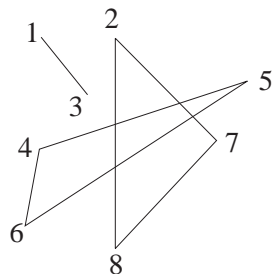
問題徵答

黃光明 提供

令 N 為平面上 n 點的集合。
 令 P 為將 N 分為 p 不相交子集, P_1, \dots, P_p 的一個剖分, $\bigcup_{i=1}^p P_i = N$ 。
 令 $C(P_i)$ 為 P_i 的凸包。如果對任何 i, j , $C(P_i) \cap C(P_j) = \emptyset$, 則稱 P 為一良性剖分 (反之則為惡性)。

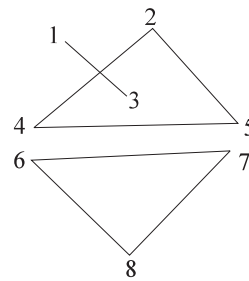
設 F 為滿足下一條件之剖分集合 (N 給定): 若 $P \in F$ 為一惡性剖分, 則 F 中必含另一剖分 P' 與 P 僅異於兩子集 P_i, P_j (即 P' 將 $P_i \cup P_j$ 重分為 P'_i, P'_j) 使得 $C(P_i) \cap C(P_j) \neq \emptyset$ 變為 $C(P'_i) \cap C(P'_j) = \emptyset$ 。下圖中顯示將 P_2, P_3 重排成 P'_2, P'_3 。

P :



$P_1 = \{1, 3\}, P_2 = \{2, 7, 8\}, P_3 = \{4, 5, 6\}$

P' :



$P'_1 = \{1, 3\}, P'_2 = \{2, 4, 5\}, P'_3 = \{6, 7, 8\}$
 試證, 或舉出反例, F 中必含一良性剖分。

提示: 1. 如果有一非負剖分函數 $f(P)$, 譬如 $f(P)$ 為 $C(P_i)$ 面積之和, 使得在上述 P 到 P' 的變換中 $f(P)$ 恆大於 $f(P')$, 則因 F 為有一限集合, 在有限多次的變換後 $f(P)$ 即不能再下降, 此時的 P 必為良性。

2. 變換時 P_i 與 P'_i 含同樣多點並不重要。如果在文首 P 不限定含「 p 」子集, 則變換時也可容許將兩子集重分為任意多不相交的子集。

* 給出正確解答者, 將被邀為一篇有關剖分的文章的合作者。