

看聯考試題談心聲

羅添壽

今年聯考數學科試題，我們幾位數學教師在解題過程中，認為難易適中，明確靈活，而且相當具有鑑別力，大體而言值得喝彩，然我們還是有一些命題上的問題，希望借「數播聯考專欄」提出共同討論研究。

今筆者分別就自然組、社會組試題，提出值得探討的問題

(A) 自然組方面:

1. 配分不均勻，容易造成投機取巧

冊數	一	二	三	四	理科上	理科下
配分	5分	28分	20分	15分	22分	10分

(註)(82)年聯考第一冊亦僅佔5分，容易誤以為第一冊不重要。

2. 填充題第3題學過隱函數的導函數的考生佔便宜。

題目：設 P 點是拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ 外一點，已知過 P 點有二直線與 Γ 相切，其斜率分別為2與-3，則斜率為2的切線方程式為___， P 點的坐標為___

解：(此方法課本未提)

$y^2 = 4x$ 分別對 x, y 偏微分

得 $2ydy = 4dx$

所以 其斜率函數為 $m = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$ 。

(1) 當斜率 $m = 2$ 得 $m = \frac{2}{y} = 2$

所以 $y = 1, x = \frac{1}{4}$

所以 切點 $A(\frac{1}{4}, 1)$

所以 切線為 $y - 1 = 2(x - \frac{1}{4})$

$$\text{所以 } y = 2x + \frac{1}{2} \quad (1)$$

(2) 當斜率 $m = -3$ 得 $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} = -3$

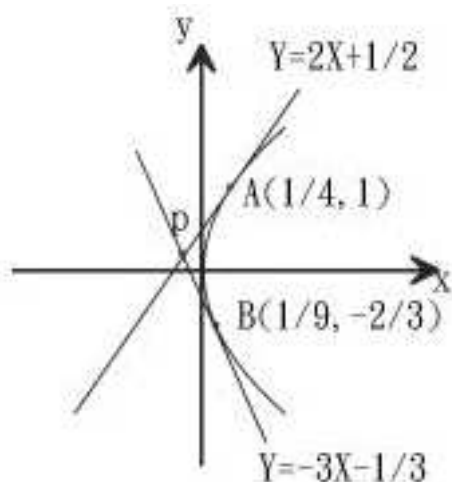
所以 $y = -\frac{2}{3}, x = \frac{1}{9}$ 得切點 $B(\frac{1}{9}, -\frac{2}{3})$

所以 切線為 $y + \frac{2}{3} = -3(x - \frac{1}{9})$

$$\text{所以 } y = -3x - \frac{1}{3} \quad (2)$$

由 (1), (2) 得 $x = -\frac{1}{6}, y = \frac{1}{6}$ 。

所以 $P(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ 。



(B) 社會組方面:

1. 試題靈活，學生誤以為沒有簡易題，故今年高低標，可能比82年聯考分別低5分左右。

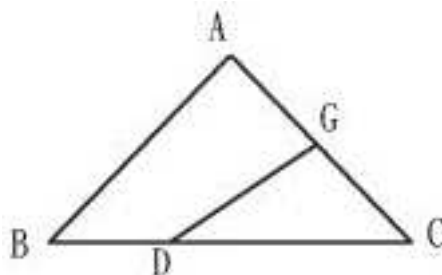
例如填充題第(1)題：有一軍團，人數在三千與四千之間，今將此軍團排成若干個同樣的方陣，發現以 8×8 方陣排之，或以 12×12 方陣排之，都恰好排盡，則此軍團人數為_____。

此題若改為課本習題：韓信點兵，兵不滿一萬，每5人一數，9人一數，13人一數，17人一數，都餘3人，問兵有多少？如此一改則一定有多數學生，異口同聲道聯考有送分題，其實是同一形態的試題。

2. 選擇題第2題，有學過斜坐標系的學生估便宜。

題目：如下圖所示， D 在 $\triangle ABC$ 之 BC 邊上且 $\overline{CD} = 2\overline{BD}$ ， G 為 AC 之中點。若將 \overrightarrow{GD} 向量寫為 $\overrightarrow{GD} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ ，其中 r 及 s 為實數，則 $r + s$ 之值等於

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$ (E) $-\frac{4}{3}$



解:

(1) 利用斜坐標系

取 $B(0,0)$, $C(3,0)$, $A(0,1)$

因為 $\overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$

$\overline{AG} : \overline{GC} = 1 : 1$

由分點公式

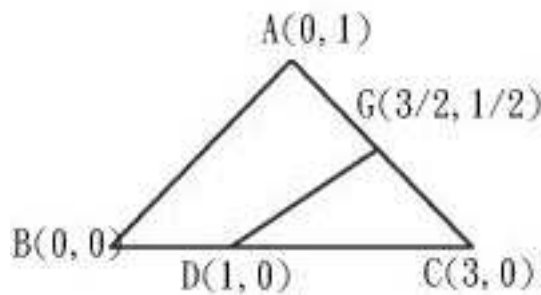
得 $D(1,0)$, $G(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

(2) 因為 $\overrightarrow{GD} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = r(0, -1) + s(3, -1)$$

$$\Rightarrow (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (3s, -r - s)$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 3s = -\frac{1}{2} \\ -r - s = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 所以 } r + s = \frac{1}{2}$$



註：此法只要斜坐標系建立後即可解出，此類之試題。

3. 選擇題第3題不宜以選擇題之形式出題。

題目： $\frac{1 + i \tan \frac{\pi}{8}}{1 - i \tan \frac{\pi}{8}}$ 之值等於

- (A) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (B) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$$(D) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad (E) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

分析：令 $\theta = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{4}$

因角度為 $\frac{\pi}{4}$ 故考生會猜 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ，而選 (E)

註：此種想法是考生告訴筆者他們聯考所用之法而轉述之。

建議：

1. 考生方面：

近年來，由於聯考數學試題靈活，考生對教材內容要徹底了解外，還要反應快，隨時思考解題過程的轉換。

例：(1) 求 $3 + 4i$ 的兩個平方根

$$(2) \text{ 求解 } z^2 - 3 - 4i = 0$$

$$(3) \text{ 求解 } z^2 + (4 - 3i)z + 1 - 7i = 0$$

以上三題，為同一形態的試題，但有一些考生會第 (1) 小題，未必會第 (2) 或第 (3) 小題。

註：解(3) $z = \frac{(-4+3i) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$$\text{其中 } \Delta = (4-3i)^2 - 4(1-7i) = 3+4i$$

所以 $\pm \sqrt{\Delta} = \pm \sqrt{3+4i}$ 表求 $3+4i$ 的兩個平方根

$$\text{令 } \alpha^2 = 3 + 4i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi, a, b \in R$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\text{所以 } \pm \sqrt{\Delta} = \pm(2+i)$$

$$\text{所以 } z = \frac{-4+3i \pm (2+i)}{2} = -1 + 2i \text{ 或 } -3 + i$$

2. 命題教授方面：

您的命題決定考生的命運，尤其社會組考題儘量有基本題（試題敘述簡單扼要），以免叫好不叫座。

例：(1) 求 $\sin 555^\circ$ 之值

$$(2) \text{ 求以 } x-7 \text{ 除 } f(x) = x^7 - 50x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 25x^2 - 30x - 11 \text{ 之餘式}$$

3. 聯招會方面：

(1) 希望數學考卷上能有更多的空白處，供學生草稿，以免影響考生解題情緒，因今年空白處很少。

(2)「設法」讓高中老師也能「參與」命題工作，因與考生接觸最多，最能了解考生情況的是高中教師，如此大學聯考的試題一定更能測出考生真正的程度。

—本文作者任教於新化高中—