

# 八十三年度大學暨獨立學院入學考試

## 數學試題

(自然組)

\*本學科共分為兩部分。第一部分為單一選擇題，請將答案劃記在「答案卡」上。第二部分為非選擇題，請將答案寫在「非選擇題試卷」上。

### 第一部分：單一選擇題 (共佔20分)

說明：本部分共有一、二兩大題，各分成若干小題；答案卡上的題號係指小題題號，自第1題至第9題。請將你的答案劃記在「答案卡」上。每小題的五個備選答案中，只有一個是對的。答錯了倒扣1/4題分；若不答，則得零分。

[一] 老張從旗桿底  $O$  點的正西方  $A$  點測得桿頂  $T$  點的仰角為  $30^\circ$ 。他向旗桿前進 30 公尺至  $B$  點，再測得桿頂的仰角為  $60^\circ$ ，則

1. 旗桿高為

- (A)  $15(\sqrt{3} - 1)$  公尺 (B)  $15\sqrt{3}$  公尺 (C)  $\frac{20}{\sqrt{3}}$  公尺 (D)  $15\sqrt{2}$  公尺 (E) 45 公尺  
(2分)

2.  $B$  點與桿頂  $T$  點的距離為

- (A) 30 公尺 (B)  $\frac{40}{3}$  公尺 (C) 10 公尺 (D) 22.5 公尺 (E)  $30\sqrt{3}$  公尺 (2分)

3. 他由  $B$  點回頭向  $A$  點走到  $C$  點，測得桿頂仰角為  $45^\circ$ ，則  $\overline{BC}$  的長為

- (A)  $15(3 - \sqrt{3})$  公尺 (B) 15 公尺 (C)  $15\sqrt{2}$  公尺  
(D)  $15\sqrt{3}$  公尺 (E)  $15(\sqrt{3} - 1)$  公尺 (2分)

4. 若他由  $B$  點向正南方走到  $D$  點，測得桿頂仰角為  $45^\circ$ ，則  $\overline{BD}$  的長為

- (A)  $15\sqrt{2}$  公尺 (B)  $15\sqrt{3}$  公尺 (C) 15 公尺

(D)  $15(3 - \sqrt{3})$  公尺 (E)  $15(\sqrt{3} - 1)$  公尺 (2分)

5.  $\tan(\angle AOD)$  的值為

(A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\sqrt{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (E)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  (2分)

[二] 在本大題中,  $e$  表示自然對數的底數,  $a$  為不等於1的正數。

6. 設  $b$  與  $c$  為不等於1的相異正數,  $s$  為正數。若  $\log_b s = \log_c s = r$ , 則

(A)  $r > 0$  (B)  $r < 0$  (C)  $\log_a s = 1$  (D)  $\log_a s = r$  (E)  $s = e$  (2分)

7. 方程式  $\log_2 x = x - 1 (x > 0)$  解的個數為

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 大於 3 (2分)

8. 判定方程式  $\log_3 x = x - 1 (x > 0)$  的解:

(A) 無解 (B) 僅有一解 (C) 有一小於1的解, 而無大於1的解  
(D) 有一大於1的解, 而無小於1的解 (E) 有一小於1的解, 也有一大於1的解  
(3分)

9. 假設  $a > 1$ , 若  $\log_a x = 2(x - 1)$  僅有一解, 則  $a =$

(A) 2 (B)  $\ln 4$  (C)  $e^2$  (D)  $e$  (E)  $\sqrt{e}$  (3分)

## 第二部分：非選擇題 (共佔80分)

說明: 本部分中第一題為填充題(共50分), 第二題至第四題為計算題或證明題(每題10分)。請都在「非選擇題試卷」上作答。注意: 請勿將無理數或無限小數寫成有限小數。例如: 不要把  $\sqrt{2}$  寫成 1.414, 也不要將  $\frac{1}{3}$  寫成 0.333。

一、填充題: 本題共有十個空格, 每個空格 5 分, 請答在「非選擇題試卷」上的第一欄, 務必寫上格號 (A, B, ..., J) 後, 再寫答案。(為節省空間, 本題作答請不要寫出演算過程。)

1. 若對所有的實數  $x$ ,  $3x^2 + 2ax - a \geq 0$  均成立, 則  $a$  的範圍為 (A)。

2. 設拋物線  $\Gamma: y = x^2 - ax + a$  與  $x$  軸交於  $(p, 0)$  與  $(q, 0)$  兩點, 其中  $0 < p < q$ 。  $\Gamma$  在第一象限與  $x$  軸、 $y$  軸所夾區域的面積為  $\alpha$ ,  $\Gamma$  在第四象限與  $x$  軸所夾區域的面積為  $\beta$ 。若  $\alpha = \beta$ , 則  $q =$  (B),  $a =$  (C)。

3. 設  $P$  點是拋物線  $\Gamma: y^2 = 4x$  外一點。已知過  $P$  點有二直線與  $\Gamma$  相切, 其斜率分別為 2 與  $-3$  則斜率為 2 的切線方程式為 (D),  $P$  點的坐標為 (E)。
4. 若矩陣  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , 則  $A^2 =$  (F)。  $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 且  $0 < \theta < \pi$ , 則  $\theta =$  (G)。
5. 爸爸、媽媽、哥哥與妹妹四人參加喜宴, 與其他人坐滿一張 12 個座位的圓桌。若四人座位相鄰, 且哥哥、妹妹夾坐於爸爸、媽媽中間, 則共有 (H) 種不同坐法。
6. 老師將 12 枝相同的鉛筆分給甲、乙、丙、丁、戊與己六位小朋友, 其中有兩位各分得 4 枝, 兩位各分得 2 枝, 而有兩位沒分到, 則共有 (I) 種分法。在這種分法下, 戊與己兩位都獲得 4 枝的機率為 (J)。

**說明:** 以下第二題至第四題為計算題或證明題, 每題 10 分。請將演算過程寫在「非選擇題試卷」上, 先標明題號(二、三、四), 再作答。

二、令  $a = \log 2$ ,  $b = \log 3$ 。試將下列數值以  $a$  與  $b$  表示:

(1)  $\log_5 72$  (3分)

(2)  $\log_6 \sqrt{5}(\sqrt{14 - 4\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}})$  (7分)

三、給定一平面  $\pi: x - 3y + 2z + 4 = 0$  及一直線  $L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+1}{-5}$ 。試求在空間中包含  $L$  而與  $\pi$  垂直的平面方程式。

四、有二曲線  $\Gamma_1: \sqrt{3}(x^2 - y^2) = 2xy$  與  $\Gamma_2: x^2 - y^2 = c$  ( $c > 0$ )。設  $P$  點是  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  的交點,  $L_1$  與  $L_2$  分別為  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  在  $P$  點的切線, 試求:

(1)  $L_2$  的斜率。 (5分)

(2)  $L_1$  與  $L_2$  所夾的銳角。 (5分)