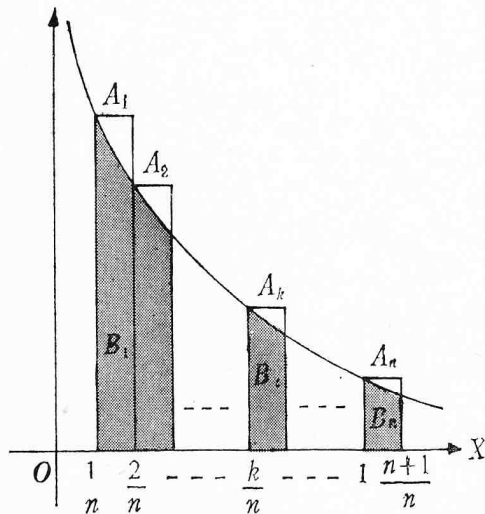


## D0018 那裡積錯了？大一程度

(1) 請找出下列演算結果的矛盾。

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x \ln x} dx &= \int \frac{1}{\ln x} d \ln x \\
 &= \frac{1}{\ln x} \cdot \ln x - \int \ln x d \frac{1}{\ln x} \\
 &= 1 - \int \ln x \left[ \frac{-1}{(\ln x)^2} \right] \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= 1 + \int \frac{1}{x \ln x} dx \\
 \Rightarrow 0 &= 1 \quad (\text{消去 } \int \frac{1}{x \ln x} dx)
 \end{aligned}$$

(2) 如右圖，曲線  $f(x) = 1/x^2$  在  $(0, 1)$  區間等分為  $n$  份，各等分點其坐標為  $(k/n, 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$  ( $n \in N$ )，在各等分點作一矩形 (如圖)，其長為  $f(k/n)$ ，其寬為  $1/n$ ，則面積  $A_k = f(k/n) \cdot (1/n) = n/k^2$ ，



由圖觀察，當  $n$  相當大時，曲線下由  $1/n$  至  $(n+1)/n$

之面積，趨近於  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{k=1}^n A_k$  即各矩形面積之和

$$\therefore \sum_{k=1}^n A_k = n \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \cong \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} \frac{1}{x^2} dx = \frac{n^2}{n+1}$$

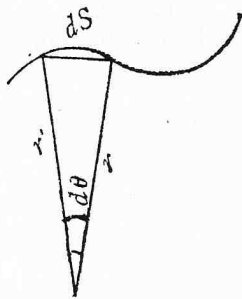
故  $\left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \cong \frac{n}{n+1} \cong 1$

當  $n$  極大時，兩者相等，結果

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = 0$$

請問錯在何處？(D0018-1)

- (3) 一極方程式  $r = f(\theta)$ ，今欲求其弧長  $S$ ，其弧長之微分  $dS$



如上圖，根據餘弦定律，

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos d\theta} \\ &= \sqrt{r^2 + r^2 - 2rr \cos d\theta} \quad (r = r', \text{當 } d\theta \rightarrow 0 \text{ 時}) \\ &= \sqrt{2} r \sqrt{1 - \cos d\theta} \\ &= \sqrt{2} r \cdot (d\theta / \sqrt{2}) \quad \left( \lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos d\theta}{d\theta^2 / 2} = 1 \right) \\ &= rd\theta \end{aligned}$$

$$\therefore dS = rd\theta$$

$$\implies \int dS = S = \int rd\theta$$

$$\therefore S = \int_{\alpha}^{\beta} rd\theta = \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) d\theta$$

但  $S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$  方為正確，請問錯誤在何處？(D0018-2)

又：當  $d\theta \rightarrow 0$  時，視曲線  $dS$  為圓弧的部份，由公式  $S = r\theta$  知  $dS = rd\theta$  (或  $dS = r'd\theta$ )，

$$\text{亦得 } S = \int_{\alpha}^{\beta} rd\theta = \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) d\theta$$

由此導來之公式又錯在何處？(D0018-3)

(建中張志中、范可輝二位同學提供)