有限冪級數的遞迴關係與史特林數

李育杰

前言：

欲解決 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ ＝？有各種不同的方法，$\sum_{k=1}^{n} k$ 於初中階段，可利用等差公式。一般而言，於高中階段欲解決 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 須從 $(k+1)^{m+1}$ 之展式著手，對 $m=1$，2，3 可藉由面積的觀點，而有圖解法；在離散數學的領域中，亦有人利用「生成函數」提出解決的方法等等。（請參閱〔1-4〕）。

本篇則是以遞迴的觀點，配合差分方程的技巧，也許可以把問題簡化一些。

首先，我們定義一些基本的符號，如下：

1. 降冪：$x^{(n)}=x\cdot(x-1)\cdots\cdots(x-n+1)$

   升冪：$x^{[n]}=x\cdot(x+1)\cdots\cdots(x+n-1)$

2. $\Delta=\mathrm{E}-1$，即 $\Delta a_n=(\mathrm{E}-1)a_n$

   $=\mathrm{E}a_n-a_n=a_{n+1}-a_n$

3. $\Delta(n+j)^{(k)}=(n+j+1)^{(k)}-(n+j)^{(k)}$

   $=k(n+j)(n+j-1)\cdots\cdots(n+j-k+2)$

   $=k(n+j)^{(k-1)}$

即 $\frac{1}{\Delta}(n+j)^{(k-1)}=\frac{1}{k}\cdot(n+j)^{(k)}$

更甚者，$\Delta^i(n+j)^{(k)}=k^{(i)}(n+j)^{(k-i)}$

且 $\frac{1}{\Delta^i}(n+j)^{(k-1)}=\frac{1}{k^{[i]}}(n+j)^{(k+i-1)}$

例1：$\sum_{k=1}^{n} k=?$

解：令 $\sum_{k=1}^{n} k=a_n$

$$a_{n+1}=a_n+(n+1)$$

$$a_{n+1}-a_n=\Delta a_n=(n+1)$$

$$a_n=\frac{1}{\Delta}(n+1)=\frac{1}{\Delta}(n+1)^{(1)}$$

$$a_n=\frac{1}{2}(n+1)^{(2)}+c$$

$$\because a_1=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+c=1 \Rightarrow c=0$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

例2：$\sum_{k=1}^{n} k^2=?$

解：令 $\sum_{k=1}^{n} k^2=a_n$

$$a_{n+1}=a_n+(n+1)^2$$

$$a_{n+1}-a_n=\Delta a_n=(n+1)^2$$

$$a_n=\frac{1}{\Delta}(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left[(n+1)^{(2)}+(n+1)^{(1)}\right]$$

$$=\frac{1}{3}(n+1)^{(3)}+\frac{1}{2}(n+1)^{(2)}+c$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+c$$

$$a_1=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}+c$$

$$=1+c$$

$$=1$$

$$\therefore c=0$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

接下來，我們想要解出 $\sum_{k=1}^{n}k^m=?$

首先求得 $\sum_{k=1}^{n}k^{(m)}=?$ 當 $m\geq 1$

令 $\sum_{k=1}^{n}k^{(m)}=a_n$

$$a_{n+1}=a_n+(n+1)^{(m)}$$

$$a_{n+1}-a_n=\Delta a_n$$

$$=(n+1)^{(m)}$$

$$a_n=\frac{1}{\Delta}(n+1)^{(m)}$$

$$=\frac{1}{m+1}(n+1)^{(m+1)}+c$$

$$\because a_1=1^{(m)}=\begin{cases}1 & m=1\\ 0 & m\geq 2\end{cases}$$

$$\therefore c=1^{(m)}-\frac{1}{m+1}2^{(m+1)}=0$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{(m)}=\frac{1}{m+1}(n+1)^{(m+1)}\cdots\cdots\cdots(1)$$

第二類史特林數(The second kind of Stirling number)

$$S(m+1,n)$$

$$=S(m,n-1)+nS(m,n)\cdots\cdots\cdots(2)$$

$S(m,i)=0$，$\forall\ i\leq 0$ 且 $i\geq m+1$

$$S(m,1)=S(m,m)=1$$

$$S(m,m-1)=\binom{m}{2}$$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

由(2)知

$$966=63+3\times 301$$

$$k=k^{(1)}$$

$$k^2=k^{(1)}+k^{(2)}$$

$$k^3=k^{(1)}+3k^{(2)}+k^{(3)}$$

$$k^4=k^{(1)}+7k^{(2)}+6k^{(3)}+k^{(4)}$$

$$k^5=k^{(1)}+15k^{(2)}+25k^{(3)}+10k^{(4)}+k^{(5)}$$

$$k^6=k^{(1)}+31k^{(2)}+90k^{(3)}+65k^{(4)}+15k^{(5)}+k^{(6)}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

由數學歸納法知

$$k^m=k^{(1)}+S(m,2)k^{(2)}+S(m,3)k^{(3)}+\cdots\cdots+S(m,m)k^{(m)}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}S(m,i)k^{(i)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由(3)知

$$\sum_{k=1}^{n}k^m=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}S(m,i)k^{(i)}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}S(m,i)\sum_{k=1}^{n}k^{(i)}$$

由(1)知 $=\sum_{i=1}^{m}S(m,i)\left[\frac{1}{i+1}(n+1)^{(i+1)}\right]$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{S(m,i)}{i+1}(n+1)^{(i+1)}$$

所以由上知

$$\sum_{k=1}^{n}k^m=\sum_{i=1}^{m}\frac{S(m,i)}{i+1}(n+1)^{(i+1)}$$

為 n 之 $m+1$ 次多項式

令 $\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{j=1}^{m+1} b_j n^j$

則 $b_{m+1} = \frac{S(m,m)}{m+1} = \frac{1}{m+1}$

$$b_m = \frac{S(m,m)}{m+1}[1+0+(-1)+\cdots+(1-m)] + \frac{S(m,m-1)}{m}$$

$$= \frac{2-m}{2} + \frac{S(m,m-1)}{m}$$

$$= \frac{1}{2}$$

註：

式子(3)的證明如下：

試證 $k^m = \sum_{i=1}^{m} S(m,i)k^{(i)}$，當 $m \geq 1$

證：

1. 當 $m=1$ 時　左 $= k^1 = S(1,1)k^{(1)}$ = 右，故此式成立。

2. 假設 $m=n$ 時此式成立，

即 $k^n = \sum_{i=1}^{n} S(n,i)k^{(i)}$

3. 當 $m=n+1$ 時

$$\text{左} = k^{n+1} = k^n \cdot k = \left(\sum_{i=1}^{n} S(n,i)k^{(i)}\right)\cdot k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} S(n,i)k^{(i)}\cdot[(k-i)+i]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} S(n,i)(k^{(i+1)}+ik^{(i)})$$

$$= S(n,n)k^{(n+1)} + nS(n,n)k^{(n)} + \sum_{i=2}^{n-1} S(n,i)(k^{(i+1)}+ik^{(i)}) + S(n,1)k^{(2)} + S(n,1)k^{(1)}$$

$$= S(n,n)k^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{n-1}[S(n,i)+(i+1)S(n,i+1)]k^{(i+1)} + S(n,1)k^{(1)}$$

$$= S(n+1,n+1)k^{(n+1)} + \sum_{j=2}^{n} S(n+1,j)k^{(j)} + S(n+1,1)k^{(1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} S(n+1,i)k^{(i)}$$

= 右，故此式亦成立。

由數學歸納法原理知

$$k^m = \sum_{i=1}^{m} S(m,i)k^{(i)}\text{，當 } m \geq 1\text{。}$$

參考資料

1. D.Acu, Some algorithms for the sums of integer powers, Mathematics Magazine 61 (1988), 189-191.
2. C.Kelly, An algorithms for sums of integer powers, Mathematics Magazine 57 (1984), 296-297.
3. J.L.Paul, On the sum of the kth powers of the first n integers , American Mathematical Monthly 78 (1971), 271-272 .
4. J.Riordan, Combinatorial identities, Wiley, New York, 1968.

——本文作者現就讀於文化大學應用數學系四年級——