

上期問題徵答

優勝名單

優良：胡豐榮

問題詳解

12201 打油問題 (周雲雄提供)

1. 顧客上門欲打一斤油，油行老闆一時之間找不到一斤的容器，手邊只有7斤及11斤的容器各一，請問老板能否用“倒進倒出”的辦法，最後倒出一斤油給顧客。

2. 若上述兩容器的容量分別為 a ， b 時，在何種條件下，上述問題仍可解。

3. 既然可倒出一斤油，就可倒出任意 k 斤油。令 $C_k(a, b)$ 為倒出 k 斤油所需的（“倒進倒出”的）最低次數。試求 $C_k(a, b)$ 。

4. 令 $S(a, b) = \sum_{k=1}^{100} C_k(a, b)$ 當 $a = 10$ ， $b = 1$ 時，易見 $C_{10k+j}(a, b) = k + C_j(a, b)$ ，故 $S(10, 1) = 10 \sum_{j=1}^{10} C_j(a, b) + 10 \sum_{k=1}^9 k = 300 + 450 = 750$ 。能否找到 a, b 使得 $S(a, b) < S(10, 1)$ ，即 a, b 容器平均來說比 10, 1 容器有效。更進一步，可否找到 a_0, b_0 ，使得

$$S(a_0, b_0) = \min_{a, b} S(a, b)$$

[註：可用電腦做一模擬實驗]

解答 (周雲雄提供)

1, 2 可倒出一斤油的充要條件是 a, b 互質：

$(a, b) = 1$ 。因為 $(a, b) = 1$ 是等值於存在自然數 m, n 使得

$$(1) \quad ma - nb = 1$$

上式表示欲倒出一斤油的方法之一是：用 a 斤的容器倒進 m 次，用 b 斤的容器倒出 n 次。譬如說在問題 1 裡 $(7, 11) = 1$ ，用歐幾里得長除法可得。

$$(2) \quad 8 \cdot 7 - 5 \cdot 11 = 1。$$

若將容器甲（7斤）注滿 8 次倒入容器乙（11），每次容器乙注滿時即將其倒空（共倒空 5 次）則在 $8 + 5 = 13$ 次運作後可在容器甲裡得到一斤油。

3. 滿足(1)式的 m, n 並非唯一。因為

$$(3) \quad (m - lb)a + (-n + la) \cdot b = 1$$

， l 是任意整數

(3)式也代表一個方法，它所需要的運作次數是 $|m - lb| + |-n + la|$ 。我們需找到適當的 l 使得 $|m - lb| + |-n + la|$ 最小。以問題 1 為例，取 $l = 1$ 時

$$-3 \cdot 7 + 2 \cdot 11 = 1$$

運作次數為 $|-3| + 2 = 5$ 為最經濟。

對一般的 k 時，由(1)式可得

$$(mk)a - (nk) \cdot b = k$$
$$(mk - \ell b) \cdot a + (-nk + \ell a) \cdot b = k$$

， ℓ 是任意整數而且上式涵蓋了所有倒出 k 斤的辦法，所以

$$(4) \quad C_k(a, b) = \min_{\ell} (|mk - \ell b| + |-nk + \ell a|)$$

(4)式看似複雜，其實計算起來很容易。以問題 I 及 $k=20$ 為例，由(2)得

$$160 \cdot 7 - 100 \cdot 11 = 20$$

由於 $11 \cdot 7 - 7 \cdot 11 = 0$ ，我們可將 160 降低，而且每次降 11： $160 = 14 \cdot 11 + 6 = 15 \cdot 11 - 5$ ，於是

$$-5 \cdot 7 + 5 \cdot 11 = 20,$$

$$6 \cdot 7 - 2 \cdot 11 = 20.$$

因為 $6 + |-2| < |-5| + 5$ ，故應取上述第二式而得 $C_{20}(7, 11) = 8$ 。

4. 很容易計算出 $S(10, 1) = 750$ 。

當 a 或 b 大於 100 時，可以證明 $S(a, b) > S(10, 1)$ 。所以我們只需考慮 $1 \leq a < b \leq 100$ 的情況。不難寫一個程式去驗證

$$\min S(a, b) = 670$$

且有三組解： $a=9, b=10$ ； $a=9, b=11$ 或 $a=10, b=11$ 。由於這是實驗結果，目前我們還不清楚當 100 變成任意一自然數 n 時，最佳解 a_0, b_0 會變成如何。實驗顯示其中似乎有規律性：

$$n = 100 \text{ 時}$$
$$S(9, 10) = S(9, 11) = S(10, 11) = 670 = \min; \quad S(1, 10) = 750$$

$$n = 200 \text{ 時}$$
$$S(14, 15) = 1890 = \min;$$

$$S(1, 10) = 2500$$

$$n = 300 \text{ 時}$$
$$S(17, 18) = 3468 = \min;$$
$$S(1, 10) = 5250$$

$$n = 400 \text{ 時}$$
$$S(19, 20) = S(19, 21) = S(20, 21) = 5340 = \min;$$
$$S(1, 10) = 9000$$

$$n = 500 \text{ 時}$$
$$S(22, 23) = 7458 = \min;$$
$$S(1, 10) = 13750$$

$$n = 600 \text{ 時}$$
$$S(24, 25) = 9800 = \min;$$
$$S(1, 10) = 19500$$

$$n = 700 \text{ 時}$$
$$S(26, 27) = 12350 = \min;$$
$$S(1, 10) = 20250$$

$$n = 800 \text{ 時}$$
$$S(28, 29) = 15092 = \min;$$
$$S(1, 10) = 34000$$

$$n = 900 \text{ 時}$$
$$S(29, 30) = S(29, 31) = S(30, 31) = 18010 = \min;$$
$$S(1, 10) = 42750$$

$$n = 1,000 \text{ 時}$$
$$S(31, 32) = 21088 = \min;$$
$$S(1, 10) = 52500$$