

# 上期徵答問題

## 優勝名單

### 12101 優勝名單

可：胡豐榮  
林 愷

## 問題詳解

### 12101 集合族問題

數播 42 期內張鎮華先生提供的徵答問題：“用鴿籠原理解數論問題”引起我一些迴想，於下提出兩個問題，試着讓讀者們再發揮鴿籠精神。設  $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

甲：(1)請找出  $2^{n-1}$  個  $[n]$  之子集合，使得其中任意兩個相交均不為空集合。

(2)請證明任何  $2^{n-1} + 1$  個  $[n]$  之子集合當中必存在兩個相交為空集合。

乙：(3)請找出  $2^{n-1}$  個  $[n]$  之非空子集合，使得其中任取三個  $A、B、C$  均滿足  $A \triangle B \triangle C \neq \phi$  這兒  $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(4)請證明任何  $2^{n-1} + 1$  個  $[n]$  之非空子集合當中，必存在三個  $A、B、C$  滿足  $A \triangle B \triangle C = \phi$

解答：

甲：(1)(胡豐榮提供)

令  $N$  代表  $[n] - \{k\}$  之所有子集所成的集合，其中  $k \in [n]$ 。再令  $D = \{S \cup \{k\} \mid \text{for all } S \in N\}$ ，則  $D$  中之所有元素即為所求。  
( $\because |D| = 2^{n-1}$ ，且  $\forall A, B \in D, A \cap B = \phi$ )

(2)(林 愷提供)

在  $2^{n-1}$  組（每組有兩個集合，所以共有  $2^n$  個集合）中任選  $2^{n-1} + 1$  個集合則根據鴿籠原理知必有 2 集合是在同一組中，而此二集合交集便是空集合，符合所求。

乙：(3)(胡豐榮提供)

由(甲)(1)所得到的  $2^{n-1}$  個  $[n]$  之子集，皆不為  $\phi$ ，且其中任何三個集合  $A, B, C$  滿足  $A \triangle B \triangle C \neq \phi$ 。

(4)(張鎮華提供)

假若  $\mathcal{F}$  含有  $[n]$  之  $2^{n-1} + 1$  個非空子集。任取  $A \in \mathcal{F}$ ，則  $\mathcal{F}^* = \{A \triangle B \mid B \in \mathcal{F}\}$  亦含有  $2^{n-1} + 1$  元素（若  $A \triangle B = A \triangle C$ ，則  $B = A \triangle A \triangle B = A \triangle A \triangle C = C$ ；請注意我們用到  $X \triangle X = \phi$  及  $\phi \triangle X = X$  兩性質），但  $[n]$  共有  $2^n$  個子集合，所以  $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}^* \neq \phi$ ，也就是存在  $B, C \in \mathcal{F}$  使得  $A \triangle B = C$ ，因此  $A \triangle B \triangle C = C \triangle C = \phi$ 。請注意  $A, B, C$  也必然不同，若  $A = B$ ，則  $C = \phi \triangle C = A \triangle B \triangle C = \phi$ ，和  $\mathcal{F}$  不含空集合矛盾。