

本期徵答問題

12101 集合族問題

數播 42 期內張鎮華先生提供的徵答問題：“用鴿籠原理解數論問題”引起我一些迴想，於下提出兩個問題，試着讓讀者們再發揮鴿籠精神。設 $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

甲：(1)請找出 2^{n-1} 個 $[n]$ 之子集合，使得其中任意兩個相交均不為空集合。

(2)請證明任何 $2^{n-1}+1$ 個 $[n]$ 之子集合當中必存在兩個相交為空集合。

乙：(3)請找出 2^{n-1} 個 $[n]$ 之非空子集合，使得其中任取三個 A, B, C 均滿足

$$A \triangle B \triangle C \neq \phi \quad \text{這兒} \quad A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

(4)請證明任何 $2^{n-1}+1$ 個 $[n]$ 之非空子集合當中，必存在三個 A, B, C 滿足 $A \triangle B \triangle C \neq \phi$

註：(1)關於鴿籠原理，可參考數播第二卷第四期謝聰智先生的“鴿籠原理”一文。該文亦收錄於數播選輯⑦「離散數學(一)」一書內 pp. 104 ~ 118。

(2)甲是一古典結果了，有興趣的讀者可參見 P. Erdős, C. Ko & R. Rado “Intersection theorems for systems of finite sets” *Quart. J. Math. Oxford* (2) 12 (1961), 313 ~ 320。

(3)乙的問題，不曉得有人問過沒有？若僅考慮集合族使任意 $A \triangle B \neq \phi$ ，那是太簡單。(為什麼?)