〔題 2〕滿足 $72^n|100!$ 的最大自然數 n 爲何值?

〔易犯的誤解〕: $72^n=8^n\cdot 9^n$, 令滿足 $8^n|100!$ 及 $9^n|100!$ 的自然數 n 的最大值各爲 n_1 及 n_2, 則因 $(8,9)=1$, 故 $(8^{n_1},9^{n_2})=1$, 所以

$$8^{n_1}\cdot 9^{n_2}|100!$$

令 $n_0=\min(n_1,n_2)$, 則 $72^{n_0}=8^{n_0}\cdot 9^{n_0}|100!$

所以 n_0 卽爲所求; 而

$$n_1=[100/8]+[100/8^2]=12+1=13$$

$$n_2=[100/9]+[100/9^2]=11+1=12$$

$$n_0=\min(13,12)=12.$$ ……………………答

※請讀者自行指出錯誤何在?

(編輯部 Y. W.)

〔正解〕: $72=2^3\cdot 3^2$, 令滿足 $2^n|100!$ 及 $3^n|100!$ 的自然數 n 的最大值各爲 n_1 及 n_2, 則必存在 $l\in N$ 使

$$100!=2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot l$$

$$(l,2)=(l,3)=1$$

因爲 72 是由 '3' 個 2 和 '2' 個 3 乘在一起而得, 所以若令 $n_0=\min([n_1/3],[n_2/2])$, 則 n_0 卽爲所求 (爲什麼?); 而

$$n_1=[100/2]+[100/2^2]+\cdots+[100/2^6]=97$$

$$n_2=[100/3]+[100/3^2]+\cdots+[100/3^4]=48$$

$$n_0=\min([97/3],[48/2])=\min(32,24)=24$$

答: $n=24$ 爲所求。

(編輯部 C. Y.)

問1 (E0003-1) 將〔題2〕一般化, 卽求滿足 $a^n|m!$ 的最大 n 值, 其中各數皆爲自然數; a,m 爲定數, n 可變動, $a>1$。

〔提示: 將 a 分解爲 $a=P_1^{e_1}\cdot P_2^{e_2}\cdots\cdots P_k^{e_k}$, 其中 $P_1<P_2<\cdots\cdots<p_k$ 皆爲正質數, $e_1,e_2,\cdots\cdots,e_k\in N$, 然後仿照〔題 2〕的正解求之。〕

(編輯部 C. Y.)

問2 (E0003-2) 同上, 但將 $m!$ 改爲 $r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdots(r-(s-1))$, 其中 $r,s\in N$ 且 $r>s$。(※此數常記爲 $P(r,s)$)

(編輯部 C. Y.)

問3 (E0003-3) $n!$ 的末尾含有多少個0? $(n\in N)$

(編輯部 Y. W.)

問4 (E0003-4) $P(n, m)=n \cdot (n-1) \cdots\cdots (n-(m-1))$ 的末尾又有多少個 0? $(n, m \in N, n > m)$

(編輯部 $Y. W.$)