

情人谷的故事與登山問題

謝聰智

(徵答對象：職業、年齡不拘)

情人谷的故事

據說從前在太平洋上有一個叫蓬萊的小島。島上有一道貫穿南北的秀奇山脈。山脈的兩端各有一片平原，南北平原各有一個小國家。南邊的小國叫阿布拉，北邊的小國叫斯米達。秀奇山脈的最高峯為靠北方的奇峯，海拔 3996 公尺，次高峯為靠南方的秀峯，海拔 3994 公尺。奇峯與秀峯間有一深谷叫翡翠谷，低於海平面 100 公尺。阿布拉與斯米達之間交通非常不便，由南到北或由北到南都必須跋涉羣山峻嶺，經過秀峯，奇峯及翡翠谷。

阿布拉及斯米達的居民都務農為生。阿布拉水果豐富，斯米達盛產蔬菜。阿布拉以水果交換蔬菜，斯米達以蔬菜交換水果。兩國交往甚密，邦交很好。但很奇怪，幾百年間從來沒有兩國之間的人民通婚。原來兩國之間有一古怪的祖傳約法，規定兩國男女聯婚必須接受一項考驗。男女雙方同時從自己的國家出發翻越秀奇山脈在相會的地點結婚。這樣的規定，為了考驗有情人的毅力，勇氣及愛情，原無可厚非。很不幸，這條祖傳約法還規定男女雙方翻越秀奇山脈時必須隨時保持同樣高度。幾百年間一對一對的異國情人分別從自己的國度不辭辛苦翻山越嶺。為了遵照祖傳約法，有時候一方越過幾個山頭後，發覺對方已經下坡，不得不也跟着後退。為了保持同樣高度，一對有情人有時同時前進，有時一進一退，有時兩人同時後退。兩人努力地遵守祖傳約法，希望終究能相會而結合。結果有的情侶不堪疲憊含恨折回，有的殉情於秀奇山脈中。始終沒有一對有情人得成眷屬。

有一年阿布拉的一名勇士希斯與斯米達長老的女兒莉娜相戀而議婚。但遵照祖宗的約法，希斯與莉娜也須在成婚之前通過秀奇山脈的考驗。希斯雖然勇敢，耐力過人，他也知道在他之前已經有千萬情侶未能通過秀奇的考驗而含恨終身。所以在出發接受考驗前，對秀奇山脈作了詳細的研究。（秀奇山脈如附圖 1）希斯發現有情人不相會的原因不在於情侶們毅力與體力不夠，而是自然地形的阻礙。祖宗約法限制下，兩情侶根本無法同時到達秀峯與奇峯，因此就沒有一個人能到達低於海平面 100 公尺的翡翠谷，結果兩人就永遠不能相會。希斯苦思竭慮終於想出一個辦法——改造大自然。他請人在秀峯山利用山頂的卵石設法加高 2 公尺，使得秀峯與奇峯同樣為 3996 公尺。如此將秀奇山脈改變後，希斯從阿布拉，莉娜從斯米達同時出發，遵照祖宗約法隨時保持同樣高度，有時前進又後退，後退又前進。經過了十五天，希斯到達秀峯頂，同時莉娜到達奇峯

頂。兩人繼續往前推進。再過十五天希斯與莉娜終於在翡翠谷相會。兩人忘掉一個月來翻山越嶺之辛苦。欣喜若狂，在翡翠谷手攜手、肩並肩，高唱愛之山歌。

希斯與莉娜經過千辛萬苦，才通過了這個祖傳久年的愛情考驗，在翡翠谷結成夫婦。後來一

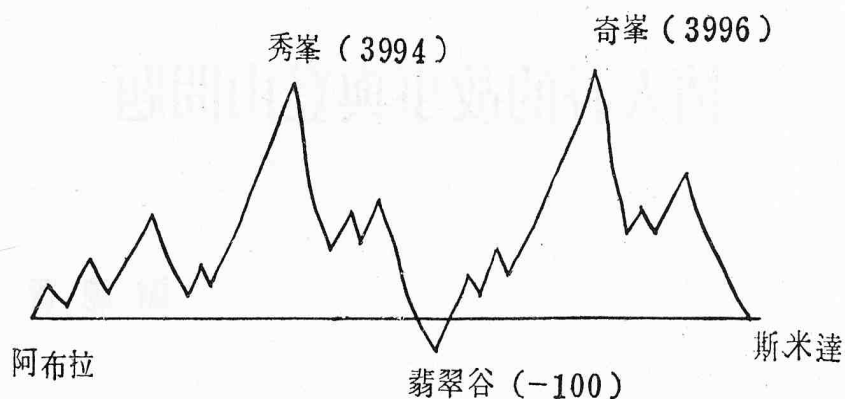


圖1. 秀奇山脈

對對的阿布拉與斯米達的青年愛侶都跟隨希斯與莉娜的足跡，翻山越嶺來在翡翠谷相會成婚。因此翡翠谷就漸漸被阿布拉與斯米達人稱為情人谷。

登山問題

甲、乙兩人從一山脈之兩端出發，如果他們的體力、耐力與勇氣十足，則經過艱危的翻山越嶺，甲、乙終究會在山脈的某一點相會。但是甲、乙翻越山嶺時受到一種限制，即甲、乙兩人隨時必須保持相同高度。則甲、乙體力、耐力再好，也不一定能相會。如當初沒有一對情侶能在祖傳的約法下越過秀奇山脈就是一個例子。由情人谷的故事，筆者提出「登山問題」敘述如下：

登山問題：甲、乙從一「正規」山脈兩端同時出發，在「等高約法」下，甲、乙是否一定有辦法相會。

在這兒，實際山脈之錯縱複雜略去不計，只是把山峯與山谷用直線相連。故我們指的山脈形狀如一把鋸牙高低不平的鋸子。一山脈的兩端高度相等，其海拔為零，而且其間山谷沒有一個低於海平面，這樣的山脈我們稱為「正規」山脈。「等高約法」是指甲乙翻越山嶺時必須隨時保持同樣高度。

希望有興趣的讀者，用心想想這個登山問題，如果認為甲、乙一定有辦法相會，請給予一般化的證明。不然，則請舉反例。更進一步，可討論當所給的山脈不為正規時，又將有何種結果？

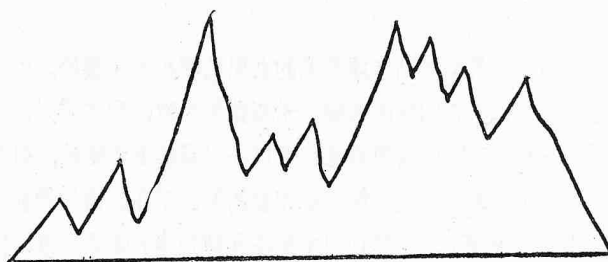


圖2. 正規山脈之例

本文作者為本所副研究員，曾任教於清華大學數學系。