

維護真理、需要勇氣

——由一個考題談起

洪武俊

在三度空間（採用直角坐標系 (x, y, z) ），有一點 P ，坐標為 $(x, 0, z)$ 。設 p 與 q 分別表示由 P 到 (x, y) 平面上的圓 $x^2 + y^2 = a^2$ 的最長與最短距離。令 Q 的坐標為 $(a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$ 的點，則

$$\textcircled{A} PQ = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{2} + \frac{p^2 - q^2}{2} \cos \theta}$$

$$\textcircled{B} PQ = \sqrt{p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + q^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\textcircled{C} PQ > \sqrt{p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + q^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\textcircled{D} PQ = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{2} - \frac{p^2 - q^2}{2} \cos \theta}$$

⑥以上皆非（複選，6分，答錯倒扣 $\frac{6}{30}$ 分）

此題為七十二學年度大學聯招甲丙組數學試題之一，聯招會命題委員會於七月七日公佈的答案為③④；七月九日又公佈「答案有漏列之處」，應為③④或①；亦即答出③④給分，答①亦給分，其他答案不給分。筆者的看法是正確答案應為④以上皆非。

我們先看看此題的詳解，再述說選答的理

由。

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (x - a \cos \theta)^2 + (0 - a \sin \theta)^2 \\ &\quad + (z - 0)^2 \\ &= x^2 + z^2 + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta \\ &\quad - 2ax \cos \theta \end{aligned}$$

$$PQ^2 = x^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \theta$$

因為 $\theta \in R$ ，所以 $-2ax \cos \theta$ 之極大值為 $2|ax|$ ，極小值為 $-2|ax|$ 。
因此 PQ^2 之極大值為

$$p^2 = x^2 + z^2 + a^2 + 2|ax|$$

極小值為

$$q^2 = x^2 + z^2 + a^2 - 2|ax|$$

$$p^2 + q^2 = 2(x^2 + z^2 + a^2)$$

$$p^2 - q^2 = 4|ax|$$

當 $ax > 0$ 時， $|ax| = ax$ ，

$$\text{故 } PQ^2 = (x^2 + z^2 + a^2) - 2|ax| \cos \theta$$

$$= \frac{p^2 + q^2}{2} - \frac{p^2 - q^2}{2} \cos \theta$$

$$\text{即 } PQ = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{2} - \frac{p^2 - q^2}{2} \cos \theta}$$

當 $ax < 0$ 時， $|ax| = -ax$ ，

故

$$PQ^2 = (x^2 + z^2 + a^2) + 2|ax| \cos \theta$$

$$= \frac{p^2 + q^2}{2} + \frac{p^2 - q^2}{2} \cos \theta$$

即 $PQ = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{2} + \frac{p^2 - q^2}{2} \cos \theta}$

當 $ax = 0$ 時，就是 $x = 0$ 時，以上兩者皆合。又③與④同義，因為

$$\begin{aligned} & \frac{p^2 + q^2}{2} - \frac{p^2 - q^2}{2} \cos \theta \\ &= \frac{p^2 + q^2}{2} - \frac{p^2 - q^2}{2} (2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) \\ &= \frac{p^2 + q^2}{2} - (p^2 - q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{p^2 - q^2}{2} \\ &= p^2 - p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + q^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ &= p^2 (1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}) + q^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ &= p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + q^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

所以③與④同選。解答完畢。

由上可知，此題原欲以 p 及 q 表出 PQ 的通式，然而當 $ax > 0$ 時，①答無效；當 $ax < 0$ 時②答無效，因此①及②皆不足以稱為正確答案，只有以⑤以上皆非為最佳選擇了！舉例說明，設 P 為 $(-1, 0, 1)$

Q 為 $(2 \cos 60^\circ, 2 \sin 60^\circ, 0)$

Q 即為 $(1, \sqrt{3}, 0)$ 若以④答表示；得

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\frac{10+2}{2} - \frac{10-2}{2} \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

但 PQ 實際上等於 $2\sqrt{2}$ ，顯然不符，可見④答欲當通解，無法勝任；同理設 P 為 $(1, 0, 1)$ 時，①答亦無法勝任。接著，我們談談有關出題的一些共識。複選題的答案必須與完整的正確答案不違背或同義，例如

設

$$3x - 10 = 0 \quad (x \in R)$$

則

$$\text{A } x = \frac{10}{3} \quad \text{B } x = \sqrt[3]{10}$$

① x 為有理數 ② x 為無理數

③ 以上皆非。（複選，6分，答錯倒扣 $\frac{6}{30}$ 分）

當然正確答案必須是①及②，因為①答同義，而②答不違背；若題目註明（單選，6分，答錯倒扣 $\frac{6}{4}$ 分）則出題者本身自相矛盾，我們知道，根據邏輯，任何命題，若前提為偽，則不管結論為真或為偽，此命題皆視為真，我們把矛盾的題目當作前提，因此考生在這個選擇題中，不管答案為何，皆視其「作答行為」為真。這就如同我們出了一道證明題：試證

$$n^2 - n + 41 \quad (n \in N)$$

為質數，試題本身已矛盾，就不好要求考生了。此時，只有忍痛全體給分（如此抉擇，對於選③答或④答或⑤答皆選之考生不無歉疚，因為全體給分等於全體不計分；也正因為懼於歉疚之事發生，而加重了出題者的責任感，可導致更完美的題目出現）對於選⑤答之考生，我們不必有所歉疚，因為事實上，並非①②③④皆非正確答案。再談選擇題中列入“以上皆非”的功能，筆者憶初中時（民國 55 年至 58 年）數學老師褚鎮榕先生（註 1）曾說：選擇題無正確答案，必須以 0 作答，不可空白。臺南市高中聯考，曾出現答案為 0 的情形，並不是全體給分，因為是人工閱卷，所以立即可甄知學生的功力。後來出題史上出現了“以上皆非”，學生答題時的干擾就更減少了。當然，出題者不必以此“以上皆非”的妙用而故意出題刁難學生，但“以上皆非”的確像「死守最後一關」，是維護真理的最後一關。聯招會數學命題委員會一再追求合理，就以七月九日再公佈答案而言，筆者認為值得喝采，真理愈辯愈明，過則不憚改，古人如是說！還有一事值得慶幸鼓掌，就是倒扣分數的合理化，例如六十九年的聯考，選擇題第 2 小題待選答案是

$$\text{A } k \in \{1, 3, 5, 7\}$$

$$\text{B } k \in \{2, 3, 6, 7\}$$

- Ⓐ $k \in \{4, 5, 6, 7\}$
 Ⓑ $k \in \{8, 9\}$
 Ⓒ $k \in \{0, 8\}$ (複選，3分，答錯倒扣 $\frac{3}{9}$ 分)

在六十八年的聯考時，此題之倒扣分數必為

$\frac{3}{30}$ 分。因為考生若不解題，其必在0至9的

十個數字中任猜一個，其答題的優勝率是 $\frac{1}{9}$ （答對的機率除以答錯的機率）而不是假定考生在五個待選答案中胡猜。

最後，我們必須為今年考生中（甲丙組考生）選擇題第10小題答Ⓐ者，感到歉疚，因

為他們不但無法得6分，而且被倒扣 $\frac{6}{30}$ 分，

在甲組中，他們的損失是7.75分。往者已矣，來者可追，在追求合理的道路上，我們本著以前的衝勁，繼續邁進。假定明年再出此題，我們要拿出勇氣，維護正確答案。

註1：褚先生任教於臺南市大成國中（當時是臺南市中），筆者就被他追求真理所感染。有關答案為0的情形，現在仍可在當時臺南市高中聯考資料中印證。

—本文作者現任教於陸軍第一士官學校—

從一個聯考試題談起

潘振輝

今年大專聯考乙丁組數學試題的非選擇部分，第二題恰好是筆者在六十五年本刊第一卷第一期的徵題徵答中提出的問題。重述如下：

設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

求 $\frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta}$ 的極小值

某生解法如下：

$$\begin{aligned} \text{則 } \frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta} &\geq 2 \sqrt{\frac{2}{\sin \theta} \cdot \frac{3}{\cos \theta}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{12}{\sin \theta}} \geq 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

故可求極小值為 $4\sqrt{3}$ 。

請問上述作法是否有不妥當之處，並說明理由。

顯然，此解法有誤，因利用正數的算術平均數大於或等於其幾何平均數來求極值，必定在等號成立才可求得。

$$\begin{aligned} \text{即 } \frac{2}{\sin \theta} &= \frac{3}{\cos \theta} \\ \text{但 } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \text{則 } \sin \theta &= \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

此時 $\frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta} = 2\sqrt{13} > 4\sqrt{3}$ 不合
因此，藉「數學傳播」徵求各方賢達的解法，但大部分來稿僅指出此題解法不妥，或由微分法求極值。沒有以現行高中課程標準的高中學生程度來解此題。

後來，筆者曾經利用歌西－舒瓦茲不等式的方向來想

$$\text{設 } p > 0, q > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$