

# 黃武雄教授演講及其回響——

## 大學數學教育的理念與實踐

演講：黃武雄

時間：2004年2月5日

地點：交通大學應用數學系

整理：詹宗智

### 一. 緣起

『許元春教授』大約三、四年前，交通大學應用數學系執行教務處推動的「世界性數學課程調查」一年期計劃。在這一年裡，系裡六、七位同仁每週聚會一次，大家一起探討世界各地著名大學數學系之課程規劃，並檢討本系之相關課程。很可惜，計劃告一段落後相關的活動也跟著結束。一年前，本人有幸參與教育部的中小學數學課程改進相關事項，同時，於書店偶然邂逅了黃武雄教授所寫的《學校在窗外》（左岸出版社（2003年））。從這裡，看到數學界同仁對數學教育與社會的積極關懷與無私奉獻。在深受感動之餘，也點起了再續本系課程改進之因緣。很高興也很難得，我們邀請黃武雄教授於2004年2月5日至本系演講。黃教授從比較寬廣的面向，深談數學教育的各種基本層面。在這強調應用、追求卓越的時代裡，誠摯地盼望，這份演講內容能帶給讀者一些反思基本問題的思緒。當然，我們更樂見這份思緒能燃起每位數學教育人員對教育本身的關懷與無私奉獻。（黑體字部份是我從演講內容裡摘要出來的，希望能引起讀者注意以作為進一步的對話素材。）

### 二. 本文

今年年初，許元春教授打電話邀我來交大談談數學教育的一些看法，他說他看了去年年底，我在左岸出版社出的一本叫《學校在窗外》的書，覺得很有意思。我很高興這本一般性的通俗書，居然引起數學同行的注意。雖然，十年來我因病已很少出來演講，也盡量避免在公開場合出現，因為我想多留點時間給自己，做心中最喜歡做的事，但許教授的誠意，透過電話中的談話傳來，立即感動了我。我便一口答應下來。

#### ● 文學使人重構價值，藝術使人了解自由，數學使人追溯根本

題目本來是「大學數學教育的理念與實踐」，但涵蓋面太大了，我只能閒談其中一二。來這裡是跟大家交換意見，也說不上演講。在思想上，我經常是「基本教義派」，但是沒有可蘭經、聖

經等經典可以遵循。所謂基本教義派，對我來說，指的是：去想一些最根本最底層的問題，希望從那些問題出發去了解紛雜的現象。幾十年來，我從數學得到最大的好處就是這件事情。在六零年代，越戰那段時間，有很多數學家、物理學家都加入反戰的行列，我想其中主要原因，便是思考根本問題的人不容易相信世俗的權威。在《學校在窗外》這本書中談到：「文學使人重構價值」，當你去接觸文學的時候，你會去想一些價值的問題，你會把自己的經驗，與小說裡面作者的經驗，相互去碰撞、印證，在那個過程裡面，你會去思考一些價值。書中也談到「藝術使人了解自由」，一位藝術工作者，如果沒有自由，藝術就不是藝術，他會不斷的思考自由，所謂自由是在這個世界所擁有的自由，相對於社會加在個人身上密密麻麻，使人不知不覺馴服的種種規範。我在書中最後談到「數學訓練的好處就是一個人可以去追溯根本」，由於你可以去想一些根本的問題，所以你不會輕易相信世俗的權威。

#### ● 個人做數學、想數學的一些經驗

我回想自己的過去，花了很多時間做數學。在座各位同學、各位老師也一樣，花了很多時間在做數學、在想數學。我從個人的經驗來談，來分享經驗，這裡頭並沒有誰對誰錯，只有透過經驗的碰撞，讓大家更進一步去思考一些問題。我中學的時候，代數很不好，因為不懂代數在幹什麼，那時是以解題取向，比如說「行列式的運算，兩行交換要換一個符號」，為什麼這樣規定？當時我對這件事一直不了解，我問老師、問別人都問不出一個道理來，於是我就放棄了學習行列式。我以前的習慣是，我學習一樣東西，如果不知道為什麼的話，我讀不下去；那時也許學校的功課並沒有給我那麼大的壓力，所以並沒有被逼著一定要讀下去，反正成績不好就不好。一直到大學一年級的時候，為了生活要去當家教，就把《范氏大代數》花了兩個禮拜的時間很努力地把它讀完，因為那時心智比較成熟了，整本書從頭讀起也比較能掌握來龍去脈，讀起來便覺容易得多。

#### ● 西方和東方思想上最大的不同是有「幾何原本」，以及希臘哲學中以理性為基礎的思考系統

在這之前，我的數學經驗主要是思考一些幾何難題。平面幾何的很多難題，對很多孩子來講，是非常重要的。歐幾里得的貢獻，真的是跨越數十個世紀，西方的思想和東方最大的不同是，西方有「幾何原本」，以及希臘哲學中以理性為基礎的思考系統。歐幾里德的幾何系統對許多人（包含愛因斯坦、羅素等）的成長經驗，都是一種震撼，而且開始知道這裡面有很好玩的東西。西方人很早就開始會看一個系統裡的「結構」，然後抓出結構的骨架出來，接著進入「演繹」，再從演繹裡去推出現象。這套方法在其他文明裡比較少出現。「平面幾何」在我的成長過程裡也非常重要，當時我並不是非常用功的孩子，但是很多朋友都會把幾何難題拿來考我，我從裡頭得到很

多的快樂。更早期時，我哥哥常拿一些好玩的問題問我，例如「zeno 詭論」，我記得小學五年級開始就接觸這個東西。

大一的時候認識楊維哲，他是從醫科轉過來的，大我三屆，他影響我很大。當我對數學幾近無知的時期，常和他在一起，他給了我很多東西，包括拿 Jacobson 的抽象代數給我讀。那時候要擁有一本書是很困難的，但是楊維哲有很多「珍藏」，我大一的時候他就把這本書丟給我，那時英文對我來講都還很困難，而且裡頭有很多德文符號。書一開始就是抽象的 Group Theory，「這是什麼東西？」還記得每天都在台大文學系館前面的大草坪的大樹下想，覺得很苦悶。有人問，為什麼到文學院呢？因為人家說文學院有漂亮的女生。那時就每天坐在那邊看那本「天書」，讀了很久，慢慢知道它在講一些東西，但是還是搞不清楚，常常讀了一、二十頁，又回過頭來重新讀一遍，大概過了二十幾天，稍微搞清楚，能搞清楚的原因是什麼？是我「放棄自己的經驗」。過去覺得，一定要用自己原有的經驗去想那些東西，但是剛進入抽象代數時，它反而要求你拋棄原有雜七雜八的經驗，那時候乾脆把它當「邏輯」來想，不要去想它背後要說明什麼東西，就當作一個一個的抽象概念去演繹，大約兩個月之後慢慢就讀完了第一卷。利用這樣的背景在大二修高等微積分、線性代數的時候，我都不上課，考試也很容易就通過了。

- 要進入「抽象」這個東西，對許多人來說都有困難，可是進入抽象世界並不表示掌握數學

要進入「抽象」這個東西，對許多人來說都有困難。對數學系的學生來說第一個困難就是進入了一個抽象的世界。可是進入抽象世界並不表示掌握數學，像我那時雖然高等代數的成績不錯，但總覺得有什麼地方不對勁，覺得那個東西就是脫離了自己的經驗。一直到了大四，仔細讀 Kurosh 的群論，上、下兩本我都好好的唸了，然後是 Irving Kaplansky 的《Infinite Abelian Groups》，再讀一些方程式論，才發現原來這些東西是連在一起的，是人去了解這個世界慢慢發展出來的。歷史發展的順序是先有方程式論，才慢慢發展出抽象的群論；但我們學的時候卻反而從抽象的群論開始，把它當作一個抽象的東西去學。這樣的學習方法是有問題的，我因為有這些矛盾的學習經驗，又時常去回想自己學習成長的過程，使得我後來對「認知心理」能做深入一點的分析。進入抽象世界，會使人掌握普遍性思考的能力，但只在抽象世界裡玩弄概念，會有偏差，必須再回到真實世界，與個人的主體經驗結合。

- 不論是文學、數學、藝術、任何知識，要學到東西就一定要有自己的主體經驗

我想表達一個觀念，不論是文學、數學、藝術、任何知識，要學到東西就一定要有自己的主體經驗，要自覺自己的主體經驗才能夠跟那些知識結合起來，可是這件事在我們的成長過程中

似乎沒有被強調，而且不斷被壓抑，大部份時間我們是被強迫讀一些沒有感覺的概念，這個現象大概會延續到做研究、甚至到整个人生的不同階段。

還有一件有趣的事，記得在大二的時候，楊維哲拿一本 Veblen 的《Foundation of Geometry》給我，那是一本很好玩的小書，它從基礎開始說起，從抽象空間的直線性、射影空間、仿射空間講到歐幾里得空間，我讀完的時候，覺得自己讀懂了，又覺得自己不懂，直到有一天在台大門口的麵攤和楊維哲一起吃麵。

楊維哲是我的老朋友，那時我剛進數學系，對數學還懵懵懂懂，楊維哲已經是一個不得了的大天才，他懂很多東西，和他在一起純粹是友情，因為問他數學，常被罵得狗血淋頭，讓我不敢輕易發問，我那時和他常常窩在同一個研究室，我記得在大學的那四年裡，只敢問他三個問題。第二個問題，就是在台大門口的麵攤問的。我問他：「我讀完了 Veblen，可是讀到最後的歐幾里得空間時（架構是一個向量空間，賦予一個 metric，就變成歐幾里得空間），有一個問題：原來歐幾里得空間的 metric 跑到那裡去了？」他跟我講說：「本來就沒有那個東西！！」這句話對我像當頭棒喝。楊維哲的回答就像禪宗裡講的「本來無一物」，那個 metric 是我們自己腦中該拋棄而未拋棄的東西！從這件事之後，我才真正明白抽象體系。是不是我太眷戀日常生活中那麼熟悉的尺度觀念，還是我的抽象領悟力太差？

- 詭異的是，唯有甩掉自己的主體經驗才能進入抽象世界，但是又不能完全甩掉

這學期，我在台大教「正交標架法」，一個醫學系畢業生很喜歡數學，所以跑來旁聽。我談到「什麼是 Riemann 結構？」，說了半天他還是沒聽懂，其實像他這樣聰明的孩子，如果沒有專注用一段時間去考慮抽象結構的意涵，這種概念對他也會覺得蠻困難的。記得大二楊維哲講那句話後，我突然開竅，了解了什麼叫「結構」，這也就是 Bourbaki 學派在 50 年代所提倡的「數學結構主義」中所說的「結構」(structure)。雖然當時我已讀過 Jacobson 的書，但是並沒有真正掌握結構的意義，還是受原來經驗世界裡的東西綁住，當我問的原來歐幾里得空間的 metric 到那裡去了？這個就是自己原來熟悉的主體經驗裡的東西，它到那裡去了？這中間有很有趣的辯證，就是一方面要維持自己的主體經驗，一方面又要甩掉自己的主體經驗，唯有甩掉自己的主體經驗才能進入抽象世界，但是又不能完全甩掉，講這句話或許大家有一些同感吧。

- 一個人最重要的，是要真正沉浸在某件事裡，而且要專注、投入

我寫《學校在窗外》，慢慢在釐清一些東西。人進到學校受教育有很多東西要學，像家長對孩子不放心、老師對學生不放心，就是因為覺得「怎麼這個東西你到現在還不懂？」。我後來慢慢想通，其實人不需要懂那麼多東西，也許有人會問「你不是一天到晚在提倡通識教育嗎，怎麼又說人不需要懂很多？」。我的看法正好相反。我現在帶我十五歲的兒子，我比較成熟了，知道怎麼帶他，基本上我給他完全的自由。他到小三時還不會寫國字，我都笑他「文盲」，他一天到晚

鬼混，沒事接觸一些雜書，一直沒受過良好的中文訓練，但到國中二年級時，已能寫出很有特色的小說。雖然他的語彙不夠豐富，但文字的感覺很濃烈。到他十四歲有一天看到陳俊全、李瑩英訪問姚鴻澤的那篇訪問稿<sup>1</sup>，內容談得非常不錯。他看完後，一個下午都不講話。隔一段時間後，他又看愛因斯坦的傳記。有一天，他跟我說：「爸爸，我現在很想自學，想好好把一些東西學下來，一個人要很厲害，一定要好好專注在一件事上。」然後他就自己開始讀書了。他原來成績落後很多，最近突然進步很快，從小我看他長大，覺得他不算是特別聰明的孩子。一個人最重要的，是要真正沉浸在某件事裡，而且要專注、投入。一個人一生一定要有幾次這樣的經驗，廢寢忘食，真正對某件事熱情而完全投入，在學習的過程是這樣，在研究的過程也是這樣。可是我們的教育環境沒有機會讓孩子培養熱情讓他專注，我想我們太急著讓孩子什麼都學會，我總覺得人先要有機會能在某方面熱情投入，他才會成熟。比如說剛才講的，我過去對代數一竅不通，但是大一真正想了解時，可以花兩個禮拜把「范氏大代數」讀完，並不是我特別聰明，是我常想一些困難的問題。我是一個數學家，但不是很出色，所以算是一個平凡的數學家，正因為我平凡，所以比較了解一般人，我不是天才，所以比較知道人是怎麼長大的。

- 人心智方面的成長最重要的，一個是培養「抽象能力」，另一個就是要維持「想像能力」，發展「直覺」

我們來想一個問題，對人心智方面的成長有兩個影響，一個是抽象能力，大家可能會直接想到是數學的那個抽象能力，那只是其中一部份。其實人類文明最重要的特徵，就是「抽象」二字，人和動物最關鍵性差別也是在抽象二字。但「抽象能力」是教不來的，只有讓人沉浸在裡頭才能慢慢了解。我觀察台大數學系的學生，每一年都有三、四個本來就想讀數學，而且讀得很不錯的，其他人就比較一般。但是到大二、大三時，有些人讀不下去了，轉到其他科系去，例如去經濟系、資訊系，甚至人類學系等，他們都讀得不錯，為什麼？因為他們有二年的時間被逼著一定要讀「抽象」的東西，從這裡發展出掌握普遍性的能力，不過，我這樣說也只是一個觀察。數學系畢業後要走那方面，路都蠻廣的，很多領域都需要有這種抽象能力的人，不要把數學當作純粹工具看待，只盯著讀高微、複變、幾何、代數...等學科中那些所謂有用的部份，而忘掉思考根本問題，分析根本問題，並從中發展出自己的抽象能力。這個抽象能力不只是數學的抽象結構掌握，而是真正的「抽象能力」。事實上藝術、文學領域也一樣，如果沒有抽象能力，就不會是好的文學、藝術。

人成長的過程最重要的，一個是要培養「抽象能力」，另一個就是要維持「想像能力」，發展「直覺」，這些又是相互扣合在一起的，它們是相互影響、提拔的。幾何學家們在討論事情時，常常畫很簡單的圖形，但彼此知道這圖形不是具體的圖形本身，而是它背後所代表的那個形體，也

---

註：數學傳播 27卷 第3期，民92年9月

許用一條曲線來代表高維的空間以談論問題。每一門學科都有它特殊的直覺，只靠抽象掌握普遍性，時常會忽略不同學科中的直覺，直覺和抽象是不斷相互影響的。這兩個東西其實是人心智發展最重要的事情，很多書可以不讀，想讀時你就要讀最重要的東西，自然以後你就可以自己學會衍生出來的知識，這是我「基本教義派」的教育理論。人最重要的不是學很多東西，而是想學什麼的時候，就有能力學什麼。

### ● 數學大概是表現抽象最極緻的學科

有學生問說：「學微積分有什麼用？為什麼不學統計？現在大家都要用統計！」可是如果好好修過微積分再學統計，只要能力到某一種程度，花一個月的時間，到圖書館裡好好把統計讀一遍，就可以進入統計的領域了。可是我們總覺得「要別人來教」，這個是整個社會對人的心智成長最大的誤解，今日教育很多問題都出在這個誤解本身，不管是急著學英文、急著做這做那，問題都出在「急著」，而輕忽這個「過程」。例如，多數人一輩子用不到二次方程，但每個孩子都要學，為什麼一定要學？事實上是透過學二次方程這樣一系列的東西，慢慢發展抽象能力。數學大概是表現抽象最極緻的學科，如果數學老師了解到這件事，就可以放心而不急著要孩子學很多東西，這是我對數學教育的基本看法。

### ● 人為什麼要學數學？我們要從宏觀的角度、從人類整個的文明來看數學的角色

今天談數學教育，我們來想「人為什麼要學數學」？在學校有一些學生，到了大二、大三時，會來找我談話，因為不知道學數學要幹嘛？許多數學系的人都經歷過這段疑惑時期，還未體會出數學真正趣味的時候，當然會問這件事。不過我們也要從宏觀的角度、從人類整個的文明來看數學的角色。在台灣，大學教育是分科教育，講好聽是「專業教育」，其實是專科教育。在中學之前，我對文學、繪畫有高度興趣，一進入數學系幾週後，我就感覺到一種氣氛，好像自己已經進入某種軌道，身不由己不能再隨意離開這個軌道，我覺得如果手裡拿著不是數學系的書走進數學系，似乎就要承擔某種罪惡感，在數學系裡如果談的不是數學的事，就是不務正業，好像是在逃避數學，其實不只數學系如此，很多科系都這樣。學科訓練常常使一個人技術化了，過份強調技術化之後即使對本行來說也是不利的，它的好處是可以專心發展「技術」，可是會慢慢不去思考它的意義，當不去思考意義後，技術化會反過來限制研究工作。

我們要注意社會學的一些理論對科學的批評，其中最具代表性的是「法蘭克福學派」，他們對科學在現代文明所扮演的角色的批評是非常負面的，他們認為科技本身已經蘊含一種計劃，這個計劃規定了科技要去支配自然、支配社會的目的，也就是當人進入科技時，他對自然、對社會的態度就已經確立了：人想要去了解自然，然後去利用自然，因此發展科技，但與此同時，他要支配自然、支配社會的目的也隱含其中了。因為這樣，法蘭克福學派批評科技是替資本主義的社

會在辯護，但是今日人類也沒有多少選擇，共產主義、社會主義都垮了，只剩資本主義當紅，大家覺得資本主義是人類唯一的出路，但是我覺得不一定，五十年後會怎樣很難說，因為人類會碰到資源耗竭的問題。現在美國在發展外太空的移民計畫，不過這些東西背後都有很多商業、軍事、政治的目的，這都是我們科技工作者，在投入心力於科技研究時，不能不去深思的問題。

- 意識到自己所努力要去發展的行業、去研究的偉大的學問，在人類文明中到底扮演什麼角色，這是個很重要的思考面向

資本主義基本上是應該被批評的，我們要用一種批判的態度去對待資本主義，資本主義社會提供了相當大的物質自由，物質自由裡又隱含了精神自由，如果人活不下去的話，談不上什麼精神自由，這是資本主義正面的部份，但是它也有它的問題。一般來說，法蘭克福學派會很尖銳地批評科學在人類文明的角色，這些批評對數學工作者、科學工作者都很重要，因為要意識到自己所努力要去發展的行業、去研究的偉大的學問，在人類文明中到底扮演什麼角色，這是個很重要的思考面向。這樣去看待問題，會讓人謙虛一些。

教育家 John Buchan，說人類要培養 humility (謙卑)、humanity (人道) and humor (幽默)，其中 humility 怎麼來？就是了解自己投身的行業所代表的意義時，才有 humility。很多人學了一些東西，在本行做得不錯，就覺得自己對人類有很大的貢獻，他的努力當然會被肯定，可是他一定要自覺到自己所扮演的角色。我三十多歲時，那時算比較「沉潛」，就是一天到晚在讀數學的時候，有一段時間會以為全心做數學才是自己唯一應該做的正業。當然今天還是會從做數學得到快樂，雖然常做了二、三個月才發現所做的東西都垮掉了，只好再重來一遍、二遍，但是一次次，仍然會想再沉浸其中。這種和自己學科長期培養出來的感覺，使得自己和它是血脈相連。雖然如此，還是應該去想做這些東西的目的是要幹什麼？這個或許也是各位同學、同事值得一起去想的問題。

- 數學在人類文明的角色

再來，談的是數學在人類文明的角色。物理學家 Freeman Dyson，和 Feynman 的態度非常不一樣。Feynman 是一個老頑童、有點子、叛逆的人，而 Dyson 是一個偏向人文的物理學家。Dyson 說得很明白，科學是六面山，有三面是非常醜陋的：僵化的紀律，與營利的目的掛勾，以及製造集體殺人的武器。原子彈的發明者，歐本海默後來時常懊惱，他一輩子到底做對還是做錯了事情。爲了要做殺人的武器，科學家在其中扮演了關鍵性的角色，所以 Dyson 說科學有醜陋的三面，但也有美麗的三面：有如藝術般美麗的姿顏，對世俗權威的顛覆，以及跨越國界人類一家。一個相信理性的人不太會隨便受人影響，會重新回到本質思考問題。數學也一樣，它有抽象系統的「封閉性」，可以完全脫離實際世界，進入抽象世界的抽象系統。數學家有一些負

面的面向，就是由於封閉性，它使人變得專斷。但反過來，它有「根本性」，讓人相對自由。數學是一個相當個人的行業，它的研究具有「個人性」。數學家到了成熟時，可以自己提一些問題，而不是只做別人的問題，或只為一個「研究組織」做分工研究。當自己提問題時，會更知道其意義在那裡，當然，提的問題也不能太無聊。數學跟科學的關係，跟整個人類的關係，都值得去思考。

### ● 問題是最重要的，人類要了解一個東西的意義一定要有問題

最後，我想提一下「問題中心」，問題是最重要的，人要了解一個東西的意義，一定要先有問題，從問題出發才容易進入該領域，相信很多同事都有同感。但是當回到大學的課堂上，我們又只能照教科書的順序教，這件事是須要改革的。很多學生在課堂上會失去興趣，主要是因為它只是一套邏輯演繹的系統，尤其數學，但是它的意義在那裡？有沒有重要的問題？剛剛在教授休息室翁志文教授提到，十幾年前台大數學系上有一個研究生叫尤釋賢，現在他在香港中文大學，研究工作非常出色，當他在台大當研究生時，有一段時候他在做代數拓撲，十分困頓，覺得不知道自己在做什麼，我看他很苦惱，就向他提了一個問題，一個好玩又重要的「熱傳導」問題。也就是，在正曲率、負曲率（鞍形）、平面的熱傳導問題。這個問題把微分方程、機率、幾何結合在一起。三種不同曲率的流形上，熱傳導的行為如何刻劃？在正曲率流形上熱傳導速度最慢，這件事與幾何直覺似有矛盾。但因為這樣，所以在正曲率流形上面，Liouville 定理是對的，因為無窮遠的訊息無法傳進有限世界來。相應的在負曲率流形上，無窮遠邊界的 Dirichlet 定理才正確，因為在負曲率流形上，訊息能從無窮遠處快速傳遞進來。這個問題非常有趣。我當時把這個問題告訴他，他非常感興趣，但是我對機率不在行，所以介紹他去中央研究院跟許順吉學機率，不久他就做了一些不錯的東西出來。「問題出發」是很重要的，另一個就是「意義」，數學是一種人的活動，講數學史，不一定要去考證，是要了解人的思想怎麼變化、數學思想變化的過程，這會讓一個人覺得他學這個有意義，會讓他比較願意投入文明的創造活動，從中取得樂趣。

### ● 反對「二一退學制」，也反對「學年學分制」

我在「學校在窗外」這本書裡頭，反對「二一退學制」，我也很反對「學年學分制」。到現在大學還不能解放，還規定最晚六年畢業，這使得人被擠壓在一個範圍裡，變成老師、學生間要常談分數的事。對我來說，老師的功能就是提供好的教材，學生要學就學，不學就算了，等他想學了再回來學，不要逼他學，逼著學學不到什麼的。逼他學最多只學到技術性的東西，這種東西學了不見得對他好，畢業後拿文憑到社會工作，腦中沒有意義，只有技術是危險的。法蘭克福學派就常批評科技人常有技術意識，用技術在看問題，會使得人生活受扭曲。教育主要是讓人了解意義，技術當然也重要，沒有技術，意義就呈現不出來，「意義」與「技術」兩方面的教育要一起進行的，缺一不可。



黃榮村當部長的時候，我就去和他說過了，看教育部能不能把「學年學分制」取消，改成「純學分制」，讀到五、六十歲才畢業也沒關係，那是個人的事情。一門課老師要求一定的水準是老師的事情，今年修不通過，明年再來、三十年後再來都可以，一個人想要玩就讓他玩，一個人一生總要玩過，台灣的孩子從小學、中學以來都沒有玩過，赫塞、哥德、愛因斯坦都有「徬徨少年時」，可是今天我們的孩子都不能有徬徨少年時。這是很危險的事，年輕不出軌到老了才出軌，會更糟糕。

人生活在世界總要有些壓力，但這壓力是自己願意的，因為有了內在興趣自己會給自己壓力，這樣的奮鬥是有意義的；反過來如果只透過外力給自己壓力才能工作，生活會過得很痛苦、一生混沌過去，很沒有意義的。

### 三. 回響

莊重教授：第一次讀到黃武雄教授寫的文章是他在數學傳播的創刊年（1977）所寫的「數學的理論與實用」，那時，我剛畢業正準備去當高中老師。接下來的幾年，藉著讀黃教授的彰中試教心得及他所耕耘的文章，倒也讓我「心安理得」及「理直氣壯」地去教導我的學生。後來赴美求學，當時網路世界尚未出現，但偶爾回台必去翻閱數學傳播是否有黃教授的文章。對他走出象牙塔，熱忱地傳播數學理念佩服不已。

二十多年後，在本系有機會親耳聆聽黃教授談「大學數學教育」。他的熱忱依然，想法更見深刻。一小時的演講，他娓娓道來，談了：

1. 數學的本質——是抽象的，是應用的，也是問題導向的。
2. 如何追求之——要真正能持續地沉浸其間，要有自己的主體經驗，又要能忘掉自己的主體經驗。
3. 數學在人類文明所扮演的角色——如文學和藝術一樣重要，就如文學使人重構價值，和藝術使人了解自由，數學使人追溯根本。

其間，他也提了不少親身經驗來佐證，使嚴肅的話題，多了些親切和輕鬆的調子。

黃教授從數學是一個學科和訓練的觀點提到了上述三件事。然而，數學作為一個應用性的角色，或因時間的限制，並沒有被黃教授多談到。也即數學作為另一面向（和其他領域的對話角色，甚而因此創造知識和技術的功能）的需求是一個擋不住的趨勢。過去的大學數學教育，即使在所謂的應用數學系，大多僅強調數學作為一個學科和訓練的面向，因此，如何將現代演化中的數學的另一面向：應用性，納入目前的數學教育是個該加速討論的課題。

總而言之，追求最根本和最底層的問題的習慣，使黃教授總能看得、想得更高和更遠，就是這股永遠如一的熱忱，使黃教授勤於筆耘他的看法。二十多年前，受益於他的筆耘，我也勉能作

為一個稱職的高中數學老師；我更樂見，一些大學生及教大學的數學老師，讀了黃教授的「大學數學教育的理念與實踐」能多些省思。

許元春教授：個人所受的數學教育與所從事的研究工作，都是比較偏向理論性的，所以對數學教育的看法在心態上比較偏向黃武雄教授所謂的「基本教義派」，是比較自然並且可以理解的（當然，不一定是正確的）。最近三、四年，從事計量財務（或財務數學）的教學與研究工作，讓我對基本教義派，有更深一層的體認。計量財務在金融市場有非常重要與廣泛的實務應用。在計量財務裡，理論模型的建立與分析是最根本的工作。沒有好的理論模型分析當基礎，其它很多部份都是奢談。從教學與帶研究生的過程裡，我看到很多學生對此領域有非常高的興趣，但因為基礎數學（含計算能力）及抽象能力之不足，使得他們很難真正進入此領域的核心課題。我為這些同學深感遺憾。此項經驗也讓我更加體認基礎課程及抽象能力的重要性。但什麼是大學基礎數學及如何教、如何學這些課程？這些問題在數學同仁間就有非常大的不同看法。黃教授在其演講中首先說明數學抽象學習與主體經驗間緊密及詭異的互動關係，進而指出「抽象」及「直觀」在人類文明發展的重要角色。最後，黃教授提出我們應該從人類文明的角色來看數學的基本意義與價值。在此觀點下，我們從演講中可約略地聽到黃教授對上述問題的看法，這些看法值得我們再度用心去體會與思索。這些看法，在實務的執行面上還有很大的討論及發揮空間。尤其在大環境不斷快速地變遷下，除了上述這些問題外，我們更應該加強數學基本演算能力的培養。這所有的一切，都需要數學界同仁透過多元的對話及在互相尊重的原則下去營造出最好的教育環境，以造福受教育的學生。

另外，文中也談到「二一退學」及「學年學分制」。交通大學於五、六年前取消「二一退學制」，但執行二年後，在二一人數大量增加，及學生學習情緒更加低落的考量下，讓大家（包括我自己）很自然地於三年前贊成回復「二一退學制」。現今再回想此事，深覺不安。教育就如同黃教授於演講中所言，應該從比較寬廣的生命自然層面來看。在此層面下，短期的效應與問題（包括教育資源使用的問題）應該是教育人員要去瞭解並且從大的格局下去協助解決的。畢竟教育的終極意義是協助每一個人都能找到其安身立命之所在！

翁志文教授：雖然之前聽過黃老師演講，但再讀整理後的摘錄文，感觸仍深。許多內容觸及每一個數學人的經驗。黃老師對抽象數學與經驗數學的見解相當平衡，我的經驗是部份數學抽象化後並沒有變難，反而容易理解；但有許多數學可以靠直覺正確解釋，所以學生時代為了強化一方的學習正確及效果，而壓抑另一方應該是短暫的行為。這如同為了練輕功可以腳綁鉛塊走路，但不能一輩子都這樣。「一個人一生一定要有幾次這樣的經驗，廢寢忘食，真正對某件事情熱情而完全投入」，這句話說得太好！我也不擔心孩子成績不好，只擔心他無法真正專注於一件感興趣的事物上。因為社會變遷，大學入學考試壓力轉到研究所入學考試，大學生能專注的事情也愈來愈少了。

盧鴻興教授：黃武雄教授在交通大學應用數學系今年二月的演講內容，是引人深思的。黃教授在個人身體病況長期困難的狀況中，仍可以突破肉體的困境，追求內在世界的最大自由，讓人非常敬佩！

黃教授在這次的演講中，著墨較多數學教育的抽象能力之培養，強調從具象抽離出結構的訓練。這方面的訓練可以讓人省思事物的根本結構，並且進一步嘗試改變結構，追求不同形式或最小結構的自由。這方面的訓練可以教育學生探討問題的根本形成，但是如果缺乏問題的推動力，結構和具象的互相來往就無法形成，形式或結構的自由就無法實踐成具象的自由！黃教授也在演講中指出「進入抽象世界，會使人掌握普遍性思考的能力，但只在抽象世界裡玩弄概念，會有偏差，必須再回到真實世界，與個人的主體經驗結合。」「唯有甩掉自己的主體經驗才能進入抽象世界，但是又不能完全甩掉。」

舉例來說，黃教授提到「行列式的運算，兩行交換要換一個符號」的問題，黃教授是從《范氏大代數》的書來了解。從物理學的角度，我們也可以由向量的外積來理解行列式的這個運算規則（ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ）。因此，結構與一些具象的對應，可以培養學生應用數學到科學問題的能力，並進一步欣賞數學的抽象和一般性。又如黃教授提到的「熱傳導」問題，更是一個好的例子。因此「微積分」和「統計」這二門課是可以相輔相成，讓學生同時具備抽象與具象的能力，才有問題導向的動力，進一步學習抽象的結構，推廣到各種不同變化的形式，方能舉一反三，培養解決相關問題的能力。

演講中最後提到數學及科學研究在現代文明中的一個困境。科研成果，正如「潘朶拉的盒子」，一旦打開它，內容就有自己的生命，脫離創造者的控制。其實這個困境自古皆然，祇是現代科技的影響更快速和巨大。要解決這個困境必須透過人類文化共同價值的確定，來導引新科技之正面應用。科研工作者應時時反省發展出的工具之正負面效應，導引新工具往正面發展。但是不應該因噎廢食，祇強調抽象結構的研究，壓抑具象實體的應用。否則數學教育將可能流於清談，演變成不斷的悖論和智力上的益智遊戲，無法和其他學科共同促進人類科學文化的進步。因此數學及科學二方面的研究可以共同合作，協力追求內在與外在世界實踐的自由，而不必劃地自限，過份強調單一領域的自體價值！

—本文演講人黃武雄教授曾任教於台大數學系，現已退休；許元春、莊重、翁志文、盧鴻興為交大教授，詹宗智為交大應數系助教—