

問題徵答

黃光明 提供

令 R 為 $\{1, 2, \dots, 2r\}$ 的集合。設有 r 族 F_1, \dots, F_r , 每一族含 n 對 R 的元素 (可以重複如 $\{1, 2\}, \{1, 2\}$, 也可以相交如 $\{1, 2\}, \{1, 3\}$), 但每一 R 元素只出現在 n 對中。

猜測: 令 A 為一 r 行 $2n$ 列的陣列。我們一定可以把 $F_i : i = 1, \dots, r$, 的 n 對適當的放在 A 的第 i 行的 $2n$ 個空格中使得 R 中的每一元素在 A 的每一列最多出現一次。

例: $r = 3, n = 4, F_1 = (\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}), F_2 = (\{4, 2\}, \{1, 6\}, \{3, 5\}, \{5, 6\}), F_3 = (\{5, 6\}, \{6, 3\}, \{5, 4\}, \{2, 1\})$ 。則 A 的一種排列是

14	23	24	13				
35	16	56	42				
	54		56	63	21		

雖然在上例中我們只用了 6 列少於 $2n = 8$ 列, 但總有需要 $2n$ 列的例子存在。譬如

12	34	12	34				
56	56			13	24		
		56	56			14	23

討論: 此問題出於一電訊交換網路的設計。 $n = 2, 3$ (任意 r) 的情形已證。