

本期徵答問題

12201 打油問題 (周雲雄提供)

1. 顧客上門欲打一斤油，油行老闆一時之間找不到一斤的容器，手邊只有7斤及11斤的容器各一，請問老板能否用“倒進倒出”的辦法，最後倒出一斤油給顧客。
2. 若上述兩容器的容量分別為 a ， b 時，在何種條件下，上述問題仍可解。
3. 既然可倒出一斤油，就可倒出任意 k 斤油。

令 $C_k(a, b)$ 為倒出 k 斤油所需的 (“倒進倒出”的) 最低次數。試求 $C_k(a, b)$ 。

4. 令 $S(a, b) = \sum_{k=1}^{100} C_k(a, b)$ 當 $a = 10$ ， $b = 1$ 時，易見 $C_{10k+j}(a, b) = k + C_j(a, b)$ ，故 $S(10, 1) = 10 \sum_{j=1}^{10} C_j(a, b) + 10 \sum_{k=1}^9 k = 300 + 450 = 750$ 。能否找到 a, b 使得 $S(a, b) < S(10, 1)$ ，即 a, b 容器平均來說比 $10, 1$ 容器有效。更進一步，可否找到 a_0, b_0 ，使得

$$S(a_0, b_0) = \min_{a, b} S(a, b)$$

[註：可用電腦做一模擬實驗]